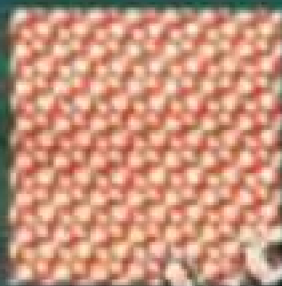


无限元方法



新登字（京）159号

北京大学数学丛书
无限元方法
应隆安 著
责任编辑：王明舟
*
北京大学出版社出版
（北京大学校内）
北京大学印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
850×1168毫米 32开本 6.125印张 150千字
1992年6月第一版 1992年6月第一次印刷
印数：0001—3,500册
ISBN 7-301-01779-0/O·278
定价：5.20元

内容简介

无限元方法是无限剖分的思想与有限元方法的结合，它打破了“有限”的限制，因而比有限元方法更加灵活。本书从Laplace方程入手，介绍了无限元方法的基本理论与应用。内容包括：基本算法、算法基础、收敛性及一些利用无限元方法解决问题的实例。本书简单扼要地概括、总结了国内外关于无限元方法的主要研究成果，同时也包括了作者本人从未公开过的一些工作成果。

本书可作大学、师范院校及工科院校数学系高年级学生选修课教材及研究生教材，也可供数学工作者及科技工作者参考。



说　　明

此丛书是以数学、计算数学、概率统计及有关专业的高年级学生、研究生、青年教师及数学研究工作者为读者对象的出版物。丛书特点是内容新颖，力图反映现代数学的新成就；叙述精练，约相当于一学期周学时为3的研究生课程的取材。我们编辑出版此丛书的主要目的是为了适应我们国家培养研究生的需要，同时，又可作为数学及有关系科高年级选修课程的参考书，为提高本科生的教学质量贡献一份力量。

我们诚恳地希望：广大读者对于书目的选择，内容的取材提出宝贵意见，作为我们今后出版或再版时的参考。

《北京大学数学丛书》编委会

一九八一年元月

序　言

无限元方法是无限剖分的思想与有限元方法的结合。无限剖分的思想最早见于Silvester-Cermak 1969年的文章，它是在差分方法的范畴内提出的。将无限剖分与有限元方法结合的文献则首推Thatcher 1975年发表在《J. Inst. Math. Appl.》上的文章“Singularities in the solution of Laplace's equation in two dimensions”。非常凑巧的是，笔者的论文“计算应力强度因子的无限相似单元法”也于1974年在南宁全国断裂力学学术会议上宣读，后来此文全文发表于1977年《中国科学》。在此之后，有不少人对此方法作了深入的研究，例如韩厚德同志关于迭代法，邵秀民同志关于傅里叶解法，潘灏同志关于无限元方法在断裂力学中的应用，许进超同志关于收敛性，等等。没有这些同志的共同努力，无限元方法不可能发展成今天的规模。

无限元方法的文献散见于各处，符号很不统一，现在看来，有些命题的叙述与证明尚有缺陷，有些方法的叙述过于偏重形式逻辑。这些缺点增加了读者阅读的困难，不利于推广应用。多年以来，笔者一直有愿望将无限元方法的理论、方法与应用汇集成一书，但由于日常事务繁忙，直到今天才能交稿。

无限元方法的基本思想是十分简单的：在有限元方法的计算过程中，人们总是将所要计算的物体分割为有限个单元，并且，受计算机的容量和运算速度所限，这有限个单元的数目也是很“有限”的。这样的限制给一些问题的求解带来了很大的困难。例如在无限大的地基上计算某一结构，无限大的地基就很不容易剖分，未知量少则不准确，多则无法计算或者白白地耗费了很多人力物力。又如在结构的某些部位产生了应力集中，力学量变化

很激烈，单元不能分得太细，计算起来就很不准确。无限元方法打破了这个限制，它允许人们在需要的时候使用无穷多个单元。这种做法比有限元方法灵活得多。对于一个待计算的问题，如果使用有限个单元已经足够，那末就按常规的办法处理，如果不够，就用无穷多个，区别对待。

因此，无限元方法的核心问题是如何求解无穷多个单元。在数学上，对于“无穷”已经积累了十分丰富的材料与研究方法，只要适当利用这些成果，问题是可以解决的。读者将会发现，如果采用一些特殊的办法，在使用了无穷多个单元以后，不仅不需要一台“无穷大的计算机”，反而用一台不大的计算机，化不多的机时，就足以应付，这正是无限元方法的吸引人之处。

当然，对于上述问题，还有很多解决办法，如边界元方法，半解析方法等。与这些方法相比，无限元方法有一个突出的优点，就是它不涉及解的解析表达式。这不仅使它可以对很多问题给出统一的求解格式，而且当解析解无法求出，或者解析解非常复杂，不便于应用时，它照样可以用。唯一的例外情况是应力强度因子的计算。读者将会发现，在奇点附近解的展开式对于应力强度因子的计算是有帮助的。

考虑到不同读者的需要，本书的材料是这样编排的：第一章介绍算法，这里涉及的数学知识很少，如果读者只对无限元方法的应用感兴趣，那末他可以不读下面的第二章与第三章；我们将算法的理论基础放在第二章，阅读这一章需要多一点的数学知识，例如索伯列夫空间论，矩阵论等；第三章讨论收敛性，这一章用到的数学知识更多一些，特别是用到了有限元方法的数学理论；在第四章，我们提供一些算例供使用者参考。笔者力争使本书能概括国内外已经发表的无限元方法的主要成果，同时本书也包括了一些笔者没有发表的工作成果。

借此机会，笔者对段学复教授和冯康教授表示特殊的感谢。在动乱的年代，段先生将上述笔者关于无限元方法的第一篇论文

推荐发表，此文经冯先生仔细地审查，提出了中肯的修改意见，后来正式发表的文章中有一节几乎是完全按照冯先生的意见修改的。冯先生还多次将无限元方法介绍给国内外同行。两位老师的帮助，不仅使无限元方法得以推广，而且对于笔者是一个极大的鼓舞。

本书是将无限元方法成书的首次尝试，它还需要不断地补充与完善，欢迎广大读者提出宝贵的意见。

应隆安

1989年3月于北大



目　录

第一章　算　　法

§1　二维Laplace方程外问题

设 Γ_0 是平面上的一个凸多边形，它的外部区域是 Ω(图1)。我们在 Ω 上求解 Laplace 方程的 Dirichlet 问题

$$\Delta u = 0, \qquad (x, y) \in \Omega, \qquad (1.1)$$

$$u|_{\Gamma_0} = f. \qquad (1.2)$$

或者将边界条件(1.2)换成

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = f. \qquad (1.3)$$

(1.1),(1.3)是一个 Neumann问题，以后我们永远以 ν 表示外法线方向. 与(1.1)联系的应变能是

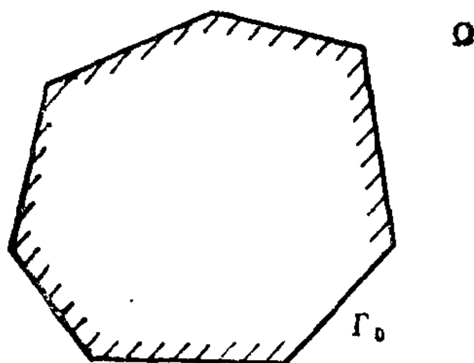


图　1

$$W = \frac{1}{2}\int_\Omega \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\} dxdy. \qquad (1.4)$$

为求解问题(1.1),(1.2)或者(1.1),(1.3)，我们将 Ω 剖分为无限多个三角形单元. 不妨设坐标原点 O 在 Γ_0 内部，取一个常数 $\xi > 1$，以 O 点为相似中心，以 $\xi, \xi^2, \cdots, \xi^k, \cdots$ 为比例常数，作 Γ_0 的相似形，它们分别记作 $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_k, \cdots$，每两个多边形之间的区域称为一“层”(图2). 然后，我们将每一层进一步剖分成单元，可以采用如下方式：在 Γ_0 上选取若干点作为节点，其中顶点必须是节点，在每条边上还可以按需要适当地再选一些节点，从 O 点出发作射线与各节点相连，这样就将每一层剖分成相似的若干个四边形，再将每个四边形剖分成两个三角形. 需要注意

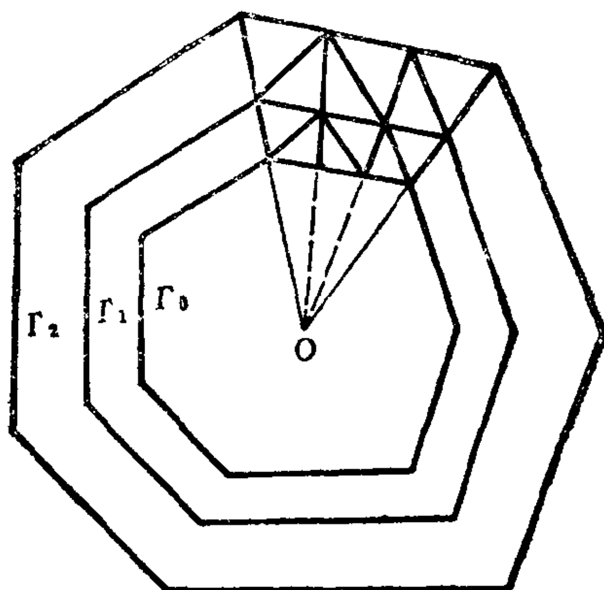


图 2

的是，每层的剖分方式必须一致(图2)。

边界 Γ_0 的形状可能不是一个凸多边形，而是非常复杂的形状。这时我们可以将 Γ_0 的外部区域分解成一个形状规则的无界区域与一个形状复杂的有界区域。无界区域仍记作 Ω，它可以按照上述办法作剖分。对于有界区域，则可以按照常规的办法作有限单元剖分(图3)。我们还使这两种剖分互相协调一致，即在交界处，三角形单元的节点与边互相吻合。在这种情况下，我们仍然先分析区域 Ω，我们将给出 Ω 上的组合刚度矩阵 K_z 的算法。

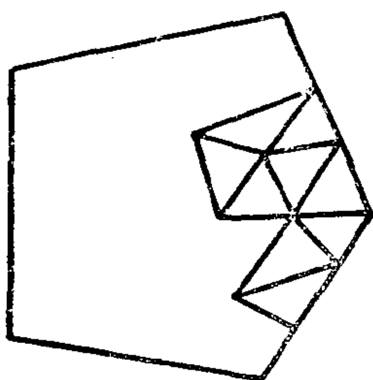


图 3

K_z 是一个有限阶的矩阵，在使用的时候，或者用它直接求解边值问题，或者将它与其它单元的刚度矩阵叠加，以求解形状复杂的区域的边值问题。对于后者，Ω 是当作一个单元来处理的。

现在考虑多边形 Γ_k。从某一点开始，按逆时针方向，将 Γ_k

上的各节点排一个次序。设节点共有 n 个。(1.1)的解 u 在节点上的值也排了一个次序，记作 $y_k^{(1)}, y_k^{(2)}, \cdots, y_k^{(n)}$，我们将它们排列成一个列向量 $(y_k^{(1)}, y_k^{(2)}, \cdots, y_k^{(n)})^{\mathrm{T}}$，记作 y_k，这里 T 表示矩阵或者向量的转置。

考虑多边形 Γ_{k-1} 与 Γ_k 之间的第 k 层。对于每个三角形单元，在节点上的值给定以后，作线性插值，可以按常规的方法求单元刚度矩阵(例如参看[52])。将第 k 层上的各单元刚度矩阵按节点叠加，可以得到一层上的刚度矩阵。我们将这个刚度矩阵记作

$$\begin{pmatrix} K_0 & -A^{\mathrm{T}} \\ -A & K_0' \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

即如果第 k 层上的应变能是 W_k，则

$$W_k = \frac{1}{2}(y_{k-1}^{\mathrm{T}}, y_k^{\mathrm{T}}) \begin{pmatrix} K_0 & -A^{\mathrm{T}} \\ -A & K_0' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{k-1} \\ y_k \end{pmatrix},$$

其中 K_0, K_0', A 都是 n 阶矩阵。从有限元方法的基本理论可知(1.5)是对称矩阵，因此 A^{T} 与 A 互为转置，K_0, K_0' 都是对称的。

从(1.4)和剖分的相似性，不难判断，各层的刚度矩阵是相同的。将各层的刚度矩阵按节点叠加，可以得到一个无穷阶的总刚度矩阵。考虑到方程与边界条件，可以给出一个无穷阶的代数方程组。令 $K = K_0 + K_0'$，则有

$$K_0 y_0 - A^{\mathrm{T}} y_1 = f_0, \tag{1.6$_0$}$$

$$-Ay_0 + Ky_1 - A^{\mathrm{T}} y_2 = 0, \tag{1.6$_1$}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-Ay_{k-1} + Ky_k - A^{\mathrm{T}} y_{k+1} = 0, \tag{1.6$_k$}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

当考虑问题(1.1)，(1.2)时，在 Γ_0 上不要列出方程，因此不要方程(1.6)$_0$，而 y_0 是已知的。当考虑问题(1.1)，(1.3)时，在 Γ_0 上

要列出方程，即方程$(1.6)_0$，其中 f_0 是“等效节点力”，用常规的有限元方法，它是可以从边界值 f 求出来的。目前，我们的目的是给出 Ω 上组合刚度矩阵的算法，因此可以暂且不管上述边界条件的差别。

我们将在下章证明，存在一个 n 阶实矩阵 X，使

$$y_{k+1} = X y_k, \qquad k = 0, 1, \cdots. \tag{1.7}$$

X 称为转移矩阵。以(1.7)式代入$(1.6)_1$得

$$(-A + KX - A^{\mathrm{T}} X^2) y_0 = 0,$$

但是 y_0 可以是任意向量，所以 X 满足方程

$$A^{\mathrm{T}} X^2 - KX + A = 0. \tag{1.8}$$

令

$$R_1 = \begin{pmatrix} K & -A \\ I & 0 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{1.9}$$

其中 I 是单位阵。方程$(1.6)_k$ 可以写成如下形式：

$$R_1 \begin{pmatrix} y_k \\ y_{k-1} \end{pmatrix} = R_2 \begin{pmatrix} y_{k+1} \\ y_k \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

设 λ, g 分别是矩阵 X 的特征值和特征向量，则有

$$Xg = \lambda g. \tag{1.11}$$

在(1.10)中取 $k=1$，令 $y_0 = g$，并且注意到(1.7)，(1.11)得

$$R_1 \begin{pmatrix} \lambda g \\ g \end{pmatrix} = \lambda R_2 \begin{pmatrix} \lambda g \\ g \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

因此 λ 与 $\begin{pmatrix} \lambda g \\ g \end{pmatrix}$ 分别是矩阵束 $R_1 - \lambda R_2$ 的广义特征值与广义特征向量[33]。为了求矩阵 X，我们先解上述广义特征值问题，求出它的全部 $2n$ 个特征值与特征向量，然后从中选出 X 的 n 个特征值与特征向量。

以后，我们总是以 det 表示一个矩阵的行列式。我们计算

$$\det(R_1 - \lambda R_2) = \det\begin{pmatrix} K - \lambda A^{\mathrm{T}} & -A \\ I & -\lambda I \end{pmatrix}。$$

在以上分块矩阵中，以 λ 乘第一列并加到第二列上得

$$\det(R_1 - \lambda R_2) = \det\begin{pmatrix} K - \lambda A^{\mathrm{T}} & -A + \lambda K - \lambda^2 A^{\mathrm{T}} \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^n \det(-A + \lambda K - \lambda^2 A^{\mathrm{T}}).$$

由 K 的对称性，上式是一个 λ 的对称多项式。因此，如果 $\lambda \neq 0$ 是一个特征值，$1/\lambda$ 也是一个特征值。我们将在下章中证明：X 的特征值满足 $|\lambda| \leqslant 1$，而且当 $|\lambda| = 1$ 时，必然有 $\lambda = 1$，其对应的特征向量 $g_1 = (1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$。因此，我们只需将矩阵束 $R_1 - \lambda R_2$ 的特征值中满足 $|\lambda| < 1$ 的选出，再添上 $\lambda = 1$。设特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，对应的特征向量是 $g_1, g_2, \cdots, g_n$，令

$$T = (g_1, g_2, \cdots, g_n), \qquad \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n),$$

其中 diag 表示对角矩阵或者块对角矩阵。由(1.11)得

$$XT = T\Lambda,$$

即

$$X = T\Lambda T^{-1}。 \tag{1.13}$$

(1.13)就是计算转移矩阵 X 的公式。以(1.7)代入$(1.6)_0$ 得

$$K_z y_0 = f_0, \tag{1.14}$$

其中 $K_z = K_0 - A^{\mathrm{T}} X$，它称为组合刚度矩阵。我们将在下一章中证明 K_z 是一个对称半正定矩阵。

组合刚度矩阵与总刚度矩阵是有区别的。在现在的情况下，总刚度矩阵是一个无穷阶矩阵，通过它可以得到任意节点值产生的应变能，而组合刚度矩阵仅是一个 n 阶矩阵，通过它只能得到当节点值 $y_0, y_1, \cdots$ 满足方程$(1.6)_1$，$(1.6)_2$，…时的应变能。从总刚度矩阵到组合刚度矩阵的过程可以看作是一个消元过程。通过这个过程，$y_1, y_2, \cdots$ 都消去了。

利用无限元方法求解的过程是这样的：先求出转移矩阵与组

合刚度矩阵，然后用与有限元方法完全同样的方式解一个代数方程组，得到 y_0，其余节点值可以由(1.7)确定。

如果 A 是一个可逆矩阵，上述广义特征值问题可以化为普通特征值问题，以 R_2^{-1} 左乘(1.12)式得

$$\begin{pmatrix} (A^{\mathrm{T}})^{-1}K & -(A^{\mathrm{T}})^{-1}A \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda g \\ g \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} \lambda g \\ g \end{pmatrix},$$

它就是一个普通特征值问题.

特征值 λ 可能是复数，这就需要作复数运算。为避免这一点，我们可以将公式(1.13)略作变形。特征值与特征向量必定是成对共轭地出现的，设 $\lambda = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$，$g = p \pm \mathrm{i}q$ 是一对特征值与特征向量，由(1.11)得

$$X(p \pm \mathrm{i}q) = (\alpha \pm \mathrm{i}\beta)(p \pm \mathrm{i}q).$$

分离实部与虚部得

$$Xp = \alpha p - \beta q, \qquad Xq = \beta p + \alpha q,$$

即

$$X(p, q) = (p, q)\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

我们替换矩阵 T 与 Λ 中对应的两列，令

$$T_1 = (\cdots, p, q, \cdots),$$

$$\Lambda_1 = \mathrm{diag}\left(\cdots, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \cdots\right).$$

不难看出

$$X = T_1 \Lambda_1 T_1^{-1}.$$

将各对复特征值一一作了以上替换以后，求转移矩阵 X 的运算就是实的了。

§2 Fourier 方法

上节中给出的方法可适用于任何的相似剖分，其运算量为解

一个 $2n$ 阶特征值问题。在本节我们对一种特殊的相似剖分使用 Fourier 变换，使得求矩阵 X, K_z 时，只需极少量的计算。

我们要求图 2 中的剖分具有下面的性质：当图 2 绕 O 点旋转 $2\pi/n$ 弧度时，它在这个旋转下不变。这时 Γ_0 是一个正多边形，以 O 点为中心，并且每个小四边形的剖分是一致的，如图 4 所示。

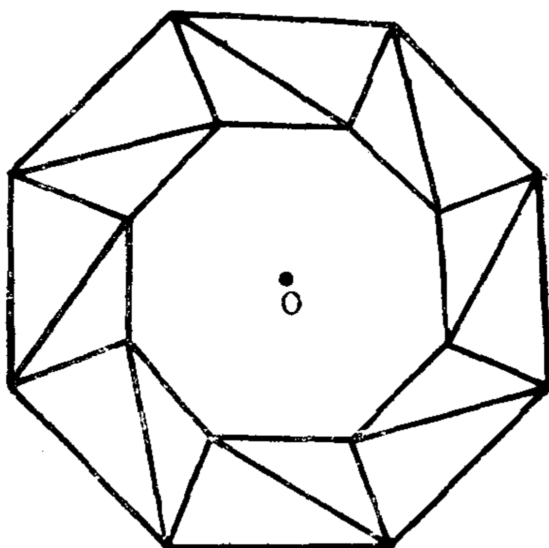


图 4

我们将在下章证明，对于这样的特殊剖分，矩阵 $K_0, K_0', \mathbf{A}$ 都是循环矩阵，即它们都是如下形状：

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ b_n & b_1 & \cdots & b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_2 & \cdots & b_n & b_1 \end{pmatrix}.$$

作单位根 $\omega = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}}$ 以及酉矩阵

$$F = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \cdots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \cdots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \cdots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix},$$

则可以对 B 施行 Fourier 变换，以 $\bar{F}$ 记 F 的共轭矩阵，通过计算可以直接验证

$$\bar{F}BF = \mathrm{diag}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i, \sum_{i=1}^{n} \omega^{i-1} b_i, \cdots, \sum_{i=1}^{n} \omega^{(i-1)(n-1)} b_i\right).$$

令 $y_k = Fz_k$，$k = 0, 1, \cdots$。以 $\bar{F}$ 左乘(1.6)的诸方程，得

$$P_0 z_0 - \bar{Q} z_1 = \bar{F} f_0, \qquad (2.1)_0$$

$$-Qz_0 + Pz_1 - \bar{Q}z_2 = 0, \qquad (2.1)_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-Qz_{k-1} + Pz_k - \bar{Q}z_{k+1} = 0, \qquad (2.1)_k$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

其中

$$P_0 = \bar{F}K_0F, \qquad Q = \bar{F}AF, \qquad P = \bar{F}KF,$$

它们都是对角矩阵。我们将它们记作

$$P_0 = \mathrm{diag}(p_0^{(1)}, p_0^{(2)}, \cdots, p_0^{(n)}),$$

$$P = \mathrm{diag}(p^{(1)}, p^{(2)}, \cdots, p^{(n)}),$$

$$Q = \mathrm{diag}(q^{(1)}, q^{(2)}, \cdots, q^{(n)}).$$

令

$$z_k = (z_k^{(1)}, z_k^{(2)}, \cdots, z_k^{(n)})^{\mathrm{T}}, \qquad \bar{F}f_0 = (\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \cdots, \varphi^{(n)})^{\mathrm{T}}.$$

将(2.1)写成分量的形式,得到n个无穷阶代数方程组($i = 1, 2, \cdots, n$)

$$p_0^{(i)} z_0^{(i)} - \bar{q}^{(i)} z_1^{(i)} = \varphi^{(i)},$$

$$-q^{(i)} z_0^{(i)} + p^{(i)} z_1^{(i)} - \bar{q}^{(i)} z_2^{(i)} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-q^{(i)} z_{k-1}^{(i)} + p^{(i)} z_k^{(i)} - \bar{q}^{(i)} z_{k+1}^{(i)} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

下面象§1一样地作推导。存在常数 $x^{(i)}$，使

$$z_{k+1}^{(i)} = x^{(i)} z_k^{(i)}, \qquad k = 0, 1, \cdots.$$

得到 $x^{(i)}$满足的方程

$$\bar{q}^{(i)} (x^{(i)})^2 - p^{(i)} x^{(i)} + q^{(i)} = 0. \qquad (2.2)$$

(2.2)的两个根的绝对值互为倒数。我们将在下章证明$|x^{(i)}| \leqslant 1$,

而且当$|x^{(i)}|=1$时，必有$x^{(i)}=1$。因此只要取

$$x^{(i)}=\frac{p^{(i)}\pm\sqrt{(p^{(i)})^2-4|q^{(i)}|^2}}{2\bar{q}^{(i)}}$$

中绝对值较小的那一个，就是我们所需要的根$x^{(i)}$。记

$$Z=\mathrm{diag}(x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(n)}),$$

则

$$z_{k+1}=Zz_k,\qquad k=0,1,\cdots,$$

$$y_{k+1}=FZ\bar{F}y_k,\qquad k=0,1,\cdots.$$

与§1比较，可以发现转移矩阵就是$X=FZ\bar{F}$，由此立即得到组合刚度矩阵

$$K_z=K_0-A^{\mathrm{T}}FZ\bar{F}.$$

§3 迭 代 法

回到§1中的任意相似剖分。虽然公式(1.13)，(1.14)都是精确的，但是求解特征值问题仍然需要通过近似计算。在这里，我们给出另一个近似算法，它的运算量比§1中的算法的运算量要小一些。

考察由$2^l(l=0,1,\cdots)$层组成的一个组合体，以

$$\begin{pmatrix} K_l & -A_l^{\mathrm{T}} \\ -A_l & K_l' \end{pmatrix}$$

记它的组合刚度矩阵。当$l=0$，只要取$A_0=A$，它与§1中的符号就是一致的。利用Laplace方程的解使应变能(1.4)达到最小这一事实，可以得到递推关系

$$(y^{\mathrm{T}},z^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix} K_{l+1} & -A_{l+1}^{\mathrm{T}} \\ -A_{l+1} & K_{l+1}' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

$$=\min_{w\in R^n}\left\{(y^{\mathrm{T}},w^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix} K_l & -A_l^{\mathrm{T}} \\ -A_l & K_l' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix}\right.$$

$$+(w^{\mathrm{T}},z^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix}K_l & -A_l^{\mathrm{T}}\\ -A_l & K'_l\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w\\ z\end{pmatrix}\Bigg\},\qquad(3.1)$$

其中 $\boldsymbol{R}^n$ 表示 n 维实向量空间。计算花括号中的量关于 w 的偏微商，并令它等于零得

$$-2A_ly+2K'_lw+2K_lw-2A_l^{\mathrm{T}}z=0.$$

因此

$$w=(K_l+K'_l)^{-1}(A_ly+A_l^{\mathrm{T}}z).\qquad(3.2)$$

将(3.2)代入(3.1)式并比较同类项得

$$K_{l+1}=K_l-A_l^{\mathrm{T}}(K_l+K'_l)^{-1}A_l,\qquad(3.3)$$

$$K'_{l+1}=K'_l-A_l(K_l+K'_l)^{-1}A_l^{\mathrm{T}},\qquad(3.4)$$

$$A_{l+1}=A_l(K_l+K'_l)^{-1}A_l.\qquad(3.5)$$

利用(3.3)—(3.5)我们可以递推地得到所有的 2^l 层组合刚度矩阵。

现在，设 y_0 为已知，c 为一待定常数，并且设当 $k\geqslant 2^l$，$i=1,2,\cdots,n$ 时，$y_k^{(i)}=c$，当 $k=1,2,\cdots,2^l-1$ 时，方程$(1.6)^k$都成立。在这些限制下，由(1.4)所给出的应变能就是

$$W=\frac{1}{2}(y_0^{\mathrm{T}},cg_1^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix}K_l & -A_l^{\mathrm{T}}\\ -A_l & K'_l\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_0\\ cg_1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}y_0^{\mathrm{T}}K_ly_0-cg_1^{\mathrm{T}}A_ly_0+\frac{1}{2}c^2g_1^{\mathrm{T}}K'_lg_1,\qquad(3.6)$$

其中 g_1 就是§1中的特征向量$(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$。

改变常数 c，使(3.6)达到最小，令$\frac{\partial W}{\partial c}=0$得

$$-g_1^{\mathrm{T}}A_ly_0+cg_1^{\mathrm{T}}K'_lg_1=0.$$

因此

$$c=\frac{g_1^{\mathrm{T}}A_ly_0}{g_1^{\mathrm{T}}K'_lg_1}=\frac{y_0^{\mathrm{T}}A_l^{\mathrm{T}}g_1}{g_1^{\mathrm{T}}K'_lg_1}.$$

于是

$$W=\frac{1}{2}y_0^{\mathrm{T}}\left(K_l-\frac{A_l^{\mathrm{T}}g_1g_1^{\mathrm{T}}A_l}{g_1^{\mathrm{T}}K'_lg_1}\right)y_0.$$

令

$$K_z^{(l)} = K_l - \frac{A_l^{\mathrm{T}} g_1 g_1^{\mathrm{T}} A_l}{g_1^{\mathrm{T}} K'_l g_1}. \tag{3.7}$$

我们将在下章证明

$$\lim_{l \to \infty} K_z^{(l)} = K_z. \tag{3.8}$$

求出组合刚度矩阵 K_z以后，由方程(1.8)

$$-(K_z + K'_0)X + A = 0,$$

可以求出转移矩阵

$$X = (K_z + K'_0)^{-1} A.$$

在下章，我们将证明(3.8)的收敛速度是非常快的．但是，这个迭代格式有一个很大的缺陷。经计算表明，迭代式(3.3)—(3.5)每计算一次，十进制有效数字大约损失一位．经过很少几次运算后，虽然 $K_z^{(l)}$就已经完全不随 l 而改变，但是它不是我们所要求的组合刚度矩阵 K_z．这就是所谓“伪收敛”现象．为解决此问题，可以在计算时取较多的字位，也可以用下面的迭代法校正已经得到的值。

下面我们给另一个迭代格式，它的收敛速度不是那么快，但却是稳定的。我们的建议是：先用(3.3)—(3.5)，(3.7)作不多的几次迭代，得到一个粗糙的 K_z的近似值，再以它为初值，用下面的迭代格式，得到所需要的高精度的 K_z矩阵。

取定 $l \geq 0$，设 2^l层的组合刚度矩阵为已知，并且有足够高的精确度．由相似性，在 2^l层以外以至无穷的无界区域上，组合刚度矩阵应该仍是 K_z，于是我们有

$$y_0^{\mathrm{T}} K_z y_0 = \min_{w \in R^n} \left\{ (y_0^{\mathrm{T}}, w^{\mathrm{T}}) \begin{pmatrix} K_l & -A_l^{\mathrm{T}} \\ -A_l & K'_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ w \end{pmatrix} + w^{\mathrm{T}} K_z w \right\}. \tag{3.9}$$

计算花括号中的量关于 w 的偏微商，并且令它等于零，我们得

$$-2A_l y_0 + 2K'_l w + 2K_z w = 0,$$

于是

$$w = (K_z + K'_l)^{-1} A_l y_0.$$

代入(3.9)式得

$$y_0^T K_z y_0 = y_0^T (K_l - A_l^T (K_z + K'_l)^{-1} A_l) y_0.$$

但是 y_0 是任意的，我们得到 K_z 满足的矩阵方程

$$K_z = K_l - A_l^T (K_z + K'_l)^{-1} A_l. \qquad (3.10)$$

我们在下章中还要证明 g_1 是 K_z 的零特征向量（对应于特征值零的特征向量）。根据(3.10)，可以设计如下的迭代格式：

1. 已知 $K_z^{(m)}$ 为对称、半正定矩阵，以 g_1 为零特征向量，则令

$$K_z^{(m+1)} = K_l - A_l^T (K_z^{(m)} + K'_l)^{-1} A_l. \qquad (3.11)$$

2. 校正。

理论上，我们将在下章证明 $K_z^{(m+1)}$ 也是对称、半正定矩阵，以 g_1 为零特征向量。但是，计算(3.11)的过程中不可避免地会有舍入误差，因此 $K_z^{(m+1)}$ 不完全具有上述性质。这会影响迭代的收敛性。为此对 $K_z^{(m+1)}$ 作适当的校正。以 k_{ij} 记矩阵 $K_z^{(m+1)}$ 的元素。首先，对于 $i \neq j$，以 $\frac{1}{2}(k_{ij} + k_{ji})$ 代替 k_{ij} 与 k_{ji}，然后令 $k_{ii} = -\sum\limits_{j \neq i} k_{ij}$。

3. 以 $m+1$ 作为 m，回到第一步。

我们将在下章证明

$$\lim_{m \to \infty} K_z^{(m)} = K_z,$$

而且只要 $K_z^{(0)}$ 是对称、半正定矩阵，以 g_1 为零特征向量，则此迭代格式不会出现“伪收敛”现象。

§4 一般单元

在§1中给出的单元剖分方式还可以进一步作推广。一方面，所使用的单元不一定限于线性三角形单元，另一方面，每一层也不一定按射线进行剖分。我们注意到，在前面的推导中，除了各层的刚度矩阵是相同的这一点以外，对于刚度矩阵我们没有提出

任何其它要求。因此，对于更为一般的剖分，前面的推理都还是适用的。

图 5 是一个不完全按射线进行剖分的例子，其中包括了线性三角形单元与四节点双线性等参数四边形单元。在一层内的剖分其实可以相当任意，只要 Γ_{k-1} 与 Γ_k 上的节点互相对应，每层的剖分是几何相似的就可以了。图 6 是使用四边形八节点等参数单元的例子。

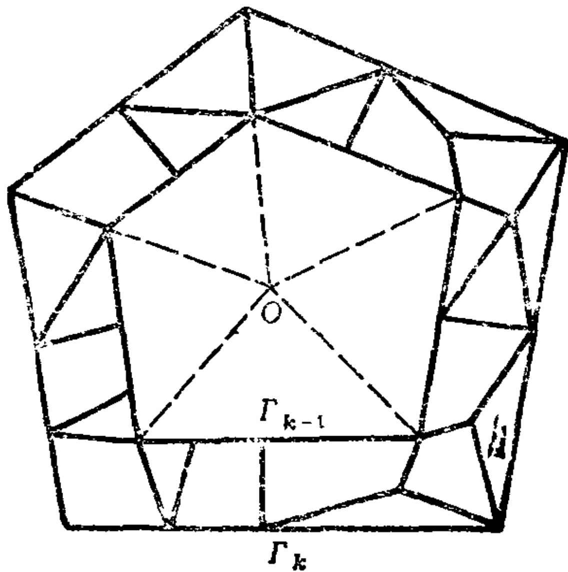


图 5

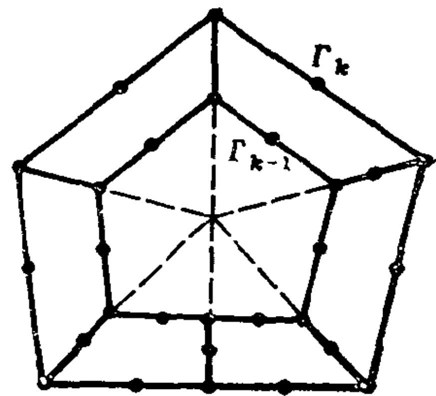


图 6

需要注意的是，图 5 与图 6 中都出现了不在 Γ_k 与 Γ_{k-1} 上的节点。这时，我们先要将这些节点上的值从方程组中消去，得出一层的组合刚度矩阵。设内部节点上的值组成了向量 y，则利用总刚度矩阵可以写出一层上的应变能为

$$W=\frac{1}{2}(y_{k-1}^{\mathrm{T}},y^{\mathrm{T}},y_k^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix}K_{11} & K_{12} & K_{13}\\ K_{21} & K_{22} & K_{23}\\ K_{31} & K_{32} & K_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_{k-1}\\ y\\ y_k\end{pmatrix}. \qquad (4.1)$$

令 $\frac{\partial W}{\partial y}=0$ 得

$$K_{22}y+\frac{1}{2}(K_{12}+K_{21})y_{k-1}+\frac{1}{2}(K_{23}+K_{32})y_k=0.$$

解出 y 得

$$y=-K_{22}^{-1}\left\{\frac{1}{2}(K_{12}+K_{21})y_{k-1}+\frac{1}{2}(K_{23}+K_{32})y_k\right\}. \tag{4.2}$$

以 (4.2) 代入 (4.1)，经整理后可得

$$W=\frac{1}{2}(y_{k-1}^{\mathrm{T}},y_k^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix}K_0 & -A^{\mathrm{T}}\\ -A & K_0'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_{k-1}\\ y_k\end{pmatrix}.$$

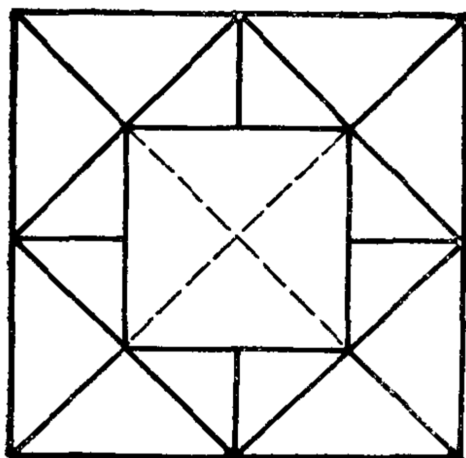


图 7

每一层的组合刚度矩阵都是相同的。

§2 中所叙述的方法也适用于更一般的剖分，例如图 7，它在旋转$\frac{\pi}{2}$弧度后保持不变.但是，它的讨论涉及到块循环矩阵，我们将在后面讨论平面应力计算时，再讨论块循环矩阵的 Fourier 方法。

§5 三维Laplace 方程外问题

与二维情形类似，设 Γ_0 为三维空间中闭凸曲面，它由空间四边形缀成，O 为内部的点. 取 $\xi>1$，以 $\xi,\xi^2,\cdots,\xi^k,\cdots$为比例常数，$O$为相似中心，作 Γ_0 的相似形，依次记为$\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots,\Gamma_k,\cdots$. 在 Γ_{k-1}与 Γ_k之间可以剖分为各种单元，例如八节点六面体等参数单元。以

$$\begin{pmatrix}K_0 & -A^{\mathrm{T}}\\ -A & K_0'\end{pmatrix}$$

记 Γ_0 与 Γ_1 之间这一层的组合刚度矩阵，则其余各层的组合刚度矩阵为

$$\xi^{k-1}\begin{pmatrix} K_0 & -A^{\mathrm{T}} \\ -A & K_0' \end{pmatrix}, \quad k=2,3,\cdots.$$

令 $K=\xi^{1/2}K_0+\xi^{-1/2}K_0'$，则与方程$(1.6)_k$对应的方程是

$$-Ay_{k-1}+\xi^{1/2}Ky_k-\xi A^{\mathrm{T}}y_{k+1}=0.$$

因此转移矩阵X满足方程

$$\xi A^{\mathrm{T}}X^2-\xi^{1/2}KX+A=0.$$

若令 $\xi^{1/2}X=Y$，则Y满足方程

$$A^{\mathrm{T}}Y^2-KY+A=0.$$

我们将在下章证明，转移矩阵 X的特征值λ都满足$|\lambda|<\xi^{-1/2}$，从而矩阵Y的特征值λ都满足$|\lambda|<1$。按照(1.9)定义矩阵 R_1,R_2以后，可以求出矩阵束 $R_1-\lambda R_2$的广义特征值与特征向量，用§1中的方法求出矩阵 Y。

以下考察迭代法。与(3.1)对应我们有方程

$$\begin{aligned}(y^{\mathrm{T}},z^{\mathrm{T}})&\begin{pmatrix} K_{l+1} & -A_{l+1}^{\mathrm{T}} \\ -A_{l+1} & K_{l+1}' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \min_{w\in R^n}\left\{(y^{\mathrm{T}},w^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix} K_l & -A_l^{\mathrm{T}} \\ -A_l & K_l' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix}\right. \\ &\quad \left.+\xi^{2^l}(w^{\mathrm{T}},z^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix} K_l & -A_l^{\mathrm{T}} \\ -A_l & K_l' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}\right\}.\end{aligned}$$

于是

$$w=(\xi^{2^l}K_l+K_l')^{-1}(A_ly+\xi^{2^l}A_l^{\mathrm{T}}z),$$

$$K_{l+1}=K_l-A_l^{\mathrm{T}}(\xi^{2^l}K_l+K_l')^{-1}A_l,$$

$$K_{l+1}'=\xi^{2^l}K_l'-\xi^{2^{l+1}}A_l(\xi^{2^l}K_l+K_l')^{-1}A_l^{\mathrm{T}},$$

$$A_{l+1}=\xi^{2^l}A_l(\xi^{2^l}K_l+K_l')^{-1}A_l.$$

我们将在下章证明

$$\lim_{l\to\infty}K_l=K_z.$$

对于第二类迭代法，类似于(3.9)，我们有

$$y_0^{\mathrm{T}} K_z y_0 = \min_{w \in R^n} \left\{ (y_0^{\mathrm{T}}, w^{\mathrm{T}}) \begin{pmatrix} K_l & -A_l^{\mathrm{T}} \\ -A_l & K_l' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ w \end{pmatrix} + \xi^{2l} w^{\mathrm{T}} K_z w \right\},$$

于是

$$w = (\xi^{2l} K_z + K_l')^{-1} A_l y_0,$$

$$K_z = K_l - A_l^{\mathrm{T}} (\xi^{2l} K_z + K_l')^{-1} A_l.$$

类似于迭代格式(3.11)，我们有

$$K_z^{(m+1)} = K_l - A_l^{\mathrm{T}} (\xi^{2l} K_z^{(m)} + K_l')^{-1} A_l.$$

§6 其他无界区域上的问题

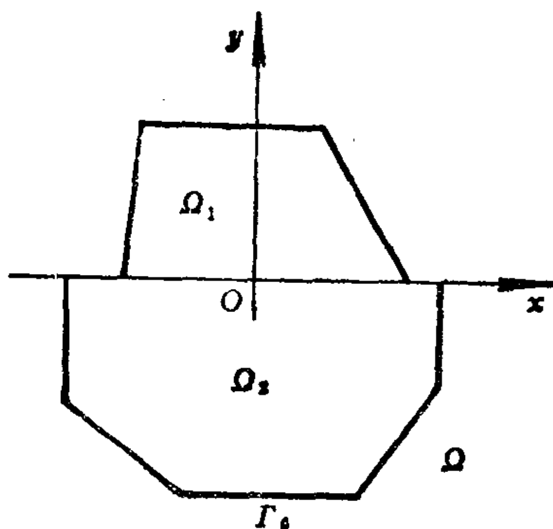


图 8

例如考虑如下问题：求解的平面区域由两个子区域组成，其中 Ω_1 是一个有界区域，另一个区域是下半平面$\{y<0\}$(图 8)。为确定起见，首先设 x 轴上的那部分边界的边界条件是$\frac{\partial u}{\partial y}=0$.在边界的其余部分也给了边界条件，求解 Laplace 方程。

在$\{y<0\}$内作一折线Γ_0，它始于负 x 轴，终于正 x 轴。Γ_0将$\{y<0\}$分解为两个子区域，其中有界的区域为 Ω_2，无界的为 Ω（图 8）。在Ω上作相似的无限剖分以后，§1, §3 中的方法可以完全不变地用于现在的情形，从而可以得到 Ω上的组合刚度矩阵 K_z。设 Γ_0 上的节点共 n 个，则 K_z是 n 阶矩阵。

其次，如果在 x 轴上的那部分边界的边界条件是$u=0$，则除去 x 轴上的节点后，K_0, K_0', A 都是 $n-2$ 阶矩阵，从而 K_z也是一个 $n-2$ 阶矩阵。此外，转移矩阵 X 的特征值 λ 均满足$|\lambda|<1$.

也可以利用递推关系(3.3)—(3.5)求 K_l, K'_l, A_l，还可以证明

$$\lim_{l\to\infty} K_l = K_z.$$

证明也将在下章给出。迭代式(3.11)仍然成立，但是此处$K_z^{(m)}$是对称正定矩阵。

§7 角点问题

设所考虑的区域(有界或无界)的边界上有一角点 O(图 9)。当内角 $\alpha>\pi$，则一般而言解在O点有奇性，或者虽然 $\alpha\leqslant\pi$，但是在O点的两条邻边上给了不同类型的边界条件，一般而言解在O点也有奇性。这里，"奇性"一词指的是当点趋于O点时，解的微商会无限地变大。用常规的有限元方法不但不能计算这个奇性，而且会使误差传播到整个区域。为了提高计算的精确度，可以采用无限元方法。

为确定起见，首先设在O点附近的边界条件是$\frac{\partial u}{\partial \nu}=0$。围绕$O$点作折线 Γ_0，它始于O点的一邻边 Γ^*，终于O点的另一邻边

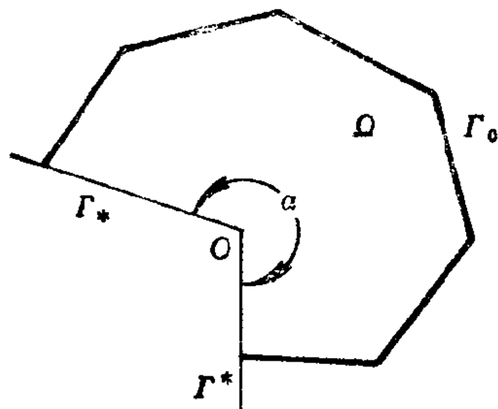


图 9

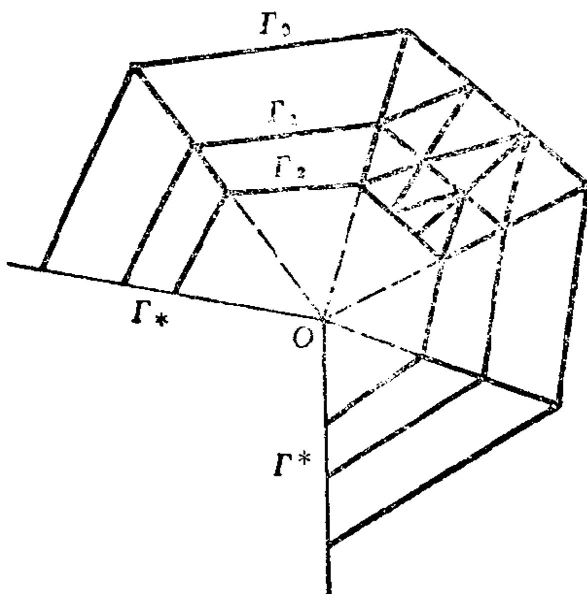


图 10

Γ_*，如图 9。以Ω表示Γ^*,Γ_*与Γ_0所围的区域。取常数ξ，$0<\xi<1$，以O点为相似中心，以$\xi,\xi^2,\cdots,\xi^k,\cdots$ 为比例常数，作折线$\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots,\Gamma_k,\cdots$，然后仿照§1中的方法，就可以作出相似的无限剖分如图10。

§1与§3中的讨论可以不加改变地用于现在的情形，其中(3.7)式还可以用一个更快的格式代替。

以O为坐标原点，引进两个新的n维向量

$$z_1=(z_1^{(1)},z_1^{(2)},\cdots,z_1^{(n)})^{\mathrm{T}},\quad z_2=(z_2^{(1)},z_2^{(2)},\cdots,z_2^{(n)})^{\mathrm{T}},$$

使它们的各分量依次是Γ_0上各节点的x坐标与y坐标。在Γ_k上给向量$\xi^k z_1$与$\xi^k z_2,k=0,1,\cdots$，则经过线性插值后就得到了函数x与y。不难看出，它们都是无限元解，因此z_1与z_2是转移矩阵X对应于特征值$\lambda=\xi$的特征向量。

取待定常数c_1,c_2,c_3，使当$k\geqslant 2^l$时，在每个单元上都有$u\equiv c_1+c_2x+c_3y$。设区域Ω的面积为S，则Γ_{2^l}与Γ^*,Γ_*所围的区域面积为$\xi^{2^{l+1}}S$，在其上的应变能等于$\frac{1}{2}\xi^{2^{l+1}}S(c_2^2+c_3^2)$，在区域$\Omega$上的总应变能为

$$W=\frac{1}{2}(y_0^{\mathrm{T}},c_1g_1^{\mathrm{T}}+c_2\xi^{2^l}z_1^{\mathrm{T}}+c_3\xi^{2^l}z_2^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix}K_l & -A_l^{\mathrm{T}}\\ -A_l & K_l'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_0\\ c_1g_1+c_2\xi^{2^l}z_1+c_3\xi^{2^l}z_2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\xi^{2^{l+1}}S(c_2^2+c_3^2).$$

令

$$c=(c_1,c_2,c_3)^{\mathrm{T}},$$

$$E_l=\begin{pmatrix}g_1^{\mathrm{T}}\\ \xi^{2^l}z_1^{\mathrm{T}}\\ \xi^{2^l}z_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}A_l,$$

$$F_l=\begin{pmatrix}g_1^{\mathrm{T}}\\ \xi^{2^l}z_1^{\mathrm{T}}\\ \xi^{2^l}z_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}K_l'(g_1,\xi^{2^l}z_1,\xi^{2^l}z_2)+\xi^{2^{l+1}}S\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

则

$$W=\frac{1}{2}y_0^TK_ly_0-c^TE_ly_0+\frac{1}{2}c^TF_lc, \qquad (7.1)$$

其中 E_l 为 $3\times n$ 矩阵，F_l 为 3×3 对称矩阵。令 $\frac{\partial W}{\partial c}=0$ 得

$$-E_ly_0+F_lc=0,$$

因此

$$c=F_l^{-1}E_ly_0.$$

代入(7.1)得

$$W=\frac{1}{2}y_0^TK_ly_0-\frac{1}{2}y_0^TE_l^TF_l^{-1}E_ly_0.$$

令

$$K_z^{(l)}=K_l-E_l^TF_l^{-1}E_l. \qquad (7.2)$$

我们将在下章证明

$$\lim_{l\to\infty}K_z^{(l)}=K_z.$$

如果在 O 点的两条邻边上的边界条件是 $u=0$，则方法也是类似的。这时象上一节一样，转移矩阵 X 的特征值 λ 均满足 $|\lambda|<1$，并且

$$\lim_{l\to\infty}K_l=K_z. \qquad (7.3)$$

如果在 O 点的两条邻边上给不同的边界条件，例如在 Γ^* 上 $\frac{\partial u}{\partial \nu}=0$，在 Γ_* 上 $u=0$，方法也一样，这时仍有 $|\lambda|<1$ 以及(7.3)。

§8 非齐次方程与非齐次边界条件

在以上各节我们考察的都是齐次方程

$$\Delta u=0.$$

至于边界条件，至少它在所讨论的那一部分上也是齐次的：

$$u=0 \quad 或 \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}=0。$$

对于非齐次问题，讨论起来要麻烦一些。以角点问题为例，设方程是

$$-\Delta u=p,$$

在O点附近的边界条件是$u=f$。因为邻域Ω可以取得适当地小，我们不妨用简单的函数逼近p与f，下面设p在Ω内是一个常数，而f在O点的两条邻边Γ^*, Γ_*上都是线性的。

在Ω上构造一个满足方程与边界条件的特解。作线性函数

$$u_1(x,y)=ax+by+c,$$

使它在边界上满足边界条件，这时$\Delta u_1=0$。其次作函数u_2，使$-\Delta u_2=p$并且u_2在Γ^*, Γ_*上等于零。设Γ^*, Γ_*的方程是

$$A_i x+B_i y+C_i=0, \quad i=1,2,$$

则令

$$u_2=D(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)。$$

这时

$$-\Delta u_2=-2D(A_1A_2+B_1B_2)。$$

令

$$D=-\frac{p}{2(A_1A_2+B_1B_2)}$$

即可。如果两条线段互相垂直，则$A_1A_2+B_1B_2=0$，用二次多项式作特解已不可能，可以考虑用三次多项式作逼近。

对于一般的边值f与非齐次项p，寻找一个特解就更麻烦一些。求一个满足边界条件的函数是不困难的，设它是u_1。再作一个函数u_2，使

$$-\Delta u_2=p+\Delta u_1,$$

并且u_2在Γ^*, Γ_*上等于零，u_1+u_2就是我们所要的特解。

u_2可以用级数求解，象（1.6）一样，写出无穷代数方程组

$$-Ay_{k-1}+Ky_k-A^{\mathrm{T}}y_{k+1}=p_k, \quad k=1,2,\cdots, \qquad (8.1)$$

其中p_k是和$p+\Delta u_1$对应的“等效节点力”。设已经求出转移矩

阵X。我们将Γ^*,Γ_*延伸以至无穷远，在Γ_0外得到一个无界区域，在无界区域上也有一个转移矩阵（见§6），为区别起见，我们将它记作$\tilde{X}$。然后，求解如下的一系列代数方程组

$$(K - A\tilde{X} - A^{\mathrm{T}}X)z_m^{(m)} = p_m, \quad m = 1,2,\cdots. \tag{8.2}$$

当m改变时方程组(8.2)的系数矩阵是不变的，因此求解(8.2)的工作量并不大。令

$$z_{k+1}^{(m)} = Xz_k^{(m)}, \qquad \text{当 } k \geqslant m,$$
$$z_{k-1}^{(m)} = \tilde{X}z_k^{(m)}, \qquad \text{当 } k \leqslant m.$$

关于m叠加：

$$z_k = \sum_{m=1}^{\infty} z_k^{(m)}, \qquad k = 0,1,\cdots.$$

z_k的插值函数就是u_2。

当考虑Neumann边界条件$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$时，我们令

$$p_0 = -\sum_{k=1}^{\infty} p_k,$$

然后求解如下的一系列代数方程组($m = 1,2,\cdots$)

$$\begin{cases} (K - A\tilde{X})z_{m-1}^{(m)} - A^{\mathrm{T}}z_m^{(m)} = \tilde{p}_{m-1}, \\ -Az_{m-1}^{(m)} + (K - A^{\mathrm{T}}X)z_m^{(m)} = -\tilde{p}_{m-1}, \end{cases} \tag{8.3}$$

其中

$$\tilde{p}_0 = p_0,$$
$$\tilde{p}_m = \tilde{p}_{m-1} + p_m, \quad m = 1,2,\cdots.$$

方程组(8.3)的系数矩阵是奇异的。我们可以令$z_m^{(m)}$的最后一个分量等于零。同时，划去系数矩阵相应的行与列。经过这样处理以后，方程组(8.3)就可以求解。令

$$z_{k+1}^{(m)} = Xz_k^{(m)}, \quad \text{当 } k \geqslant m,$$
$$z_{k-1}^{(m)} = \tilde{X}z_k^{(m)}, \quad \text{当 } k \leqslant m-1,$$

关于m叠加并插值就得u_2。

我们将在下章证明上述算法的合理性。

总之，我们已经找到了一个在 Ω 上满足方程与局部边界条件的特解 u_0。令 $u=u_0+v$，则 v 在 Ω 内满足齐次方程与齐次边界条件，可以用 § 7 中的方法求 v，在 Ω 之外用常规的有限元方法求 u。在 Γ_0 上 u 与 v 需满足一定的条件，这些条件使得 u 与 v 得以联立求解。我们来推导这些条件。

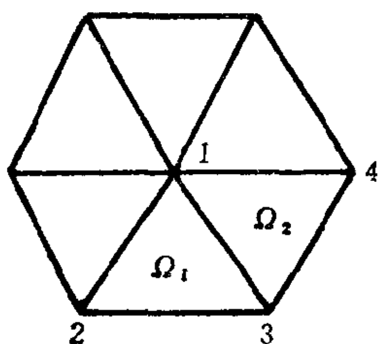


图 11

如图11，设 b_1 为 Γ_0 的一个节点，它周围的节点为 $b_2, b_3, \cdots, b_{m+1}$，周围的三角形单元为 $e_1, e_2, \cdots, e_m$，其中 $e_1, \cdots, e_{m_1}$ 在 Ω 内，$e_{m_1+1}, \cdots, e_m$ 在 Ω 外。函数 φ_1 在 b_1 点等于1，在其余节点上均等于零，在每个单元上是线性函数，在 b_1 点可以建立方程

$$u(b_1)=u_0(b_1)+v(b_1), \tag{8.4}$$

$$\sum_{i=1}^{m_1}\int_{\Omega_i}\nabla\varphi_1\cdot\nabla u_0\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\sum_{i=1}^{m_1}\int_{\Omega_i}\nabla\varphi_1\cdot\nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \sum_{i=m_1+1}^{m}\int_{\Omega_i}\nabla\varphi_1\cdot\nabla u\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sum_{i=1}^{m}\int_{\Omega_i}\varphi_1 p\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{8.5}$$

其中 $\nabla\varphi_1=\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x},\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)$，余类推。(8.5)式左端的第二个积分与第三个积分都可以通过刚度矩阵与节点上的值表示。

将方程(8.4)，(8.5)，Ω 之外的常规有限元方程，以及方程

$$y_1=Xy_0$$

联立，就可以求解。

§ 9　平面弹性问题

考虑平面应变问题，这时方程组是

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}=0,$$

$$\begin{pmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda+2\mu & \lambda & 0\\ \lambda & \lambda+2\mu & 0\\ 0 & 0 & \mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{pmatrix},$$

其中 $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$是应力，$u,v$ 是位移，λ,μ 是 Lamé 常数。平面应力问题有相同的方程，只需将常数λ,μ 作一调整。如果在边界上给定位移，边界条件是

$$u=f_x,\quad v=f_y. \tag{9.1}$$

如果在边界上给定分布的表面力，边界条件是

$$\begin{aligned}&\sigma_x\cos(\nu,x)+\tau_{xy}\cos(\nu,y)=f_x,\\ &\tau_{xy}\cos(\nu,x)+\sigma_y\cos(\nu,y)=f_y.\end{aligned} \tag{9.2}$$

也有时在同一边上既给一个位移边界条件，又给一个表面力条件。在区域Ω上的应变能是

$$W=\frac{1}{2}\int_\Omega\left\{(\lambda+2\mu)\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right)+2\lambda\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right.$$

$$\left.+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{9.3}$$

有时问题具有某种对称性，例如图12，此时弹性体关于x轴对称，表面力关于x轴成镜面反射。除去了物体作刚体运动的因素以后，它的位移关于x轴也是成镜面反射的。为了节省计算量，可以只计算区域在上半平面$\{y>0\}$上的一半。利用对称性，在x轴上有如下的滑动边界条件：

$$v=0,\quad \tau_{xy}=0.$$

它属于上述位移表面力混合边界条件。

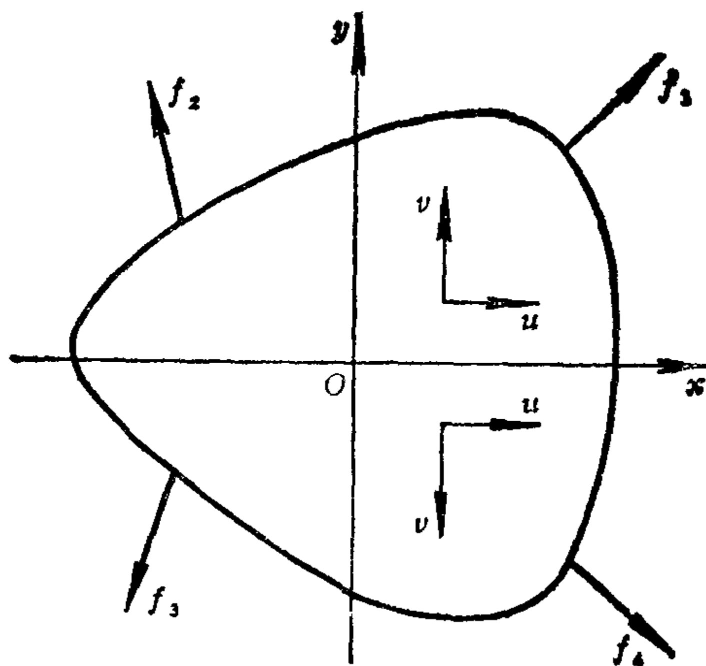


图 12

求解上述问题的无限元方法与§1—§8中的方法是类似的。我们先讨论角点问题(图9)。设在O点附近的边界条件是自由边界条件 即边界条件(9.2)，其中$f_s=f_n=0$。

按照图10作剖分以后，设Γ_k上节点共有n个，按逆时针方向排列，各节点上的位移依次是$u_k^{(1)},v_k^{(1)},u_k^{(2)},v_k^{(2)},\cdots,u_k^{(n)},v_k^{(n)}$，它们组成了一个$2n$维向量$y_k$。这时可以按(9.3)计算一层的刚度矩阵，将应变能表示为

$$W_k=\frac{1}{2}(y_{k-1}^{\mathrm{T}},y_k^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix}K_0 & -A^{\mathrm{T}}\\ -A & K_0'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_{k-1}\\ y_k\end{pmatrix},$$

其中K_0,K_0',A都是$2n$阶方阵，它们与层次k无关。

令$K=K_0+K_0'$，则公式(1.6)—(1.14)都适用，只是转移矩阵X的性质略有不同。在X的特征值中，有两个等于1，分别对应了特征向量

$$g_1=(1,0,1,0,\cdots,1,0)^{\mathrm{T}},$$
$$g_2=(0,1,0,1,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

它们就是沿着x方向的平移与沿着y方向的平移。其余特征值均

满足$|\lambda|<1$。

关于迭代法，(3.3)—(3.5)在此处仍适用。为计算近似的组合刚度矩阵$K_2^{(l)}$，设当$k\geqslant 2^l$时，$y_k=c_1g_1+c_2g_2$，其中c_1,c_2是两个待定常数。于是应变能等于

$$W=\frac{1}{2}(y_0^{\mathrm{T}},c_1g_1^{\mathrm{T}}+c_2g_2^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix}K_l & -A_l^{\mathrm{T}}\\ -A_l & K_l'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_0\\ c_1g_1+c_2g_2\end{pmatrix}.$$

令
$$c=(c_1,c_2)^{\mathrm{T}},$$

$$E_l=\begin{pmatrix}g_1^{\mathrm{T}}\\ g_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}A_l,\quad F_l=\begin{pmatrix}g_1^{\mathrm{T}}\\ g_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}K_l'(g_1,g_2),\qquad (9.4)$$

就得到(7.1),(7.2)式。

还可以设计一种更快的格式。象§7一样地取$z_1,z_2\in\boldsymbol{R}^n$。作两个向量

$$z_{11}=(z_{11}^{(1)},z_{11}^{(2)},\cdots,z_{11}^{(2n)})^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{R}^{2n},$$
$$z_{12}=(z_{12}^{(1)},z_{12}^{(2)},\cdots,z_{12}^{(2n)})^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{R}^{2n},$$

它们满足($i=1,2,\cdots,n$)

$$z_{11}^{(2i-1)}=z_1^{(i)},\qquad z_{12}^{(2i-1)}=0,$$
$$z_{11}^{(2i)}=0,\qquad z_{12}^{(2i)}=z_1^{(i)}.$$

对于向量z_2，用同样的方式形成$z_{21},z_{22}\in\boldsymbol{R}^{2n}$。取待定常数$c_i(i=1,\cdots,6)$，使当$k\geqslant 2^l$时

$$y_k=c_1g_1+c_2g_2+c_3\xi^kz_{11}+c_4\xi^kz_{12}+c_5\xi^kz_{21}+c_6\xi^kz_{22}.$$

实际上，我们假定当$k\geqslant 2^l$时，位移u,v都是线性函数。再假定当$k=1,2,\cdots,2^{l-1}$，方程$(1.6)_k$都成立。由(9.3)，在Ω上的应变能就是

$$W=\frac{1}{2}(y_0^{\mathrm{T}},y_{2l}^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix}K_l & -A_l^{\mathrm{T}}\\ -A_l & K_l'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_0\\ y_{2l}\end{pmatrix}$$
$$+\xi^{2^{l+1}}S\{(\lambda+2\mu)(c_3^2+c_6^2)+2\lambda c_3c_6+\mu(c_4+c_5)^2\},$$

其中，象§7一样，S是区域Ω的面积。令$c=(c_1,\cdots,c_6)^{\mathrm{T}}$，

$$E_l=G^{\mathrm{T}}A_l,\qquad (9.5)$$

$$F_l = G^{\mathrm{T}} K'_l G + \xi^{2^{l+1}} S \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+2\mu & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \mu & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & \lambda+2\mu \end{pmatrix},$$

其中

$$G = (g_1, g_2, \xi^{2^l} z_{11}, \xi^{2^l} z_{12}, \xi^{2^l} z_{21}, \xi^{2^l} z_{22}),$$

就得到了(7.1),(7.2)式。

公式(3.11)同样适用于现在的情形。需要注意的是校正的步骤。现在 K_z 是对称、半正定矩阵，并且 g_1, g_2 都是它的零特征向量。可以作如下校正：以 k_{ij} 记矩阵 $K_z^{(m+1)}$ 的元素，对于 $1 \leqslant i \leqslant 2n$，令

$$k_{i,2n} = -\sum_{l=1}^{n-1} k_{i,2l}, \qquad k_{i,2n-1} = -\sum_{l=1}^{n-1} k_{i,2l-1},$$

然后用 $\frac{1}{2}(k_{ij} + k_{ji})$ 代替 k_{ij} 与 k_{ji} $(1 \leqslant i, j \leqslant 2n)$。

上述讨论可以推广到外问题以及如§6那样的无界区域上的自由边界条件问题。公式(1.6)—(1.14)现在仍适用。对于迭代法，公式(3.3—(3.5)乃至公式(9.4)，(7.2)等都仍然适用。但是，公式(9.5)已不适用，公式(3.11)也不适用。

对于角点问题，如果在 O 点附近的边界条件是固定边界条件 $u = v = 0$，我们指出它与自由边界条件的不同点。由于在边界上去掉了四个自由度，K_0, K'_0, A 都是 $2n-4$ 阶方阵，转移矩阵 X 的所有特征值 λ 均满足 $|\lambda| < 1$。对于迭代法，(3.3)—(3.5)在此处仍适用。还可以证明

$$\lim_{l \to \infty} K_l = K_z.$$

这时不能计算 $K_z^{(l)}$，也不必计算它。公式(3.11)也同样适用于现在的情形。但是现在 K_z 是对称正定矩阵，在校正的步骤中，只

要用$\frac{1}{2}(k_{ij}+k_{ji})$代替$k_{ij}$与$k_{ji}$就可以了。

边界条件是多种多样的，在两侧还可以给不同的边界条件。这样，边界条件的组合种类十分繁多。在每种边界条件下，矩阵X, K_z的性质不同，迭代的算法也不同。为了统一地处理上述边界条件，我们引进“允许平移”的概念。

在局部边界条件限制下，弹性体可能发生的平移称为允许平移。例如，对于一个角点，若两侧都给自由边界条件，则允许平移是$u\equiv c_1$，$v\equiv c_2$，其中c_1, c_2是任意常数；若两侧都给固定边界条件，则允许平移是$u\equiv v\equiv 0$；又如图13，在OA线段上给自由边界条件，线段OB的倾斜角为θ，在其上给滑动边界条件：

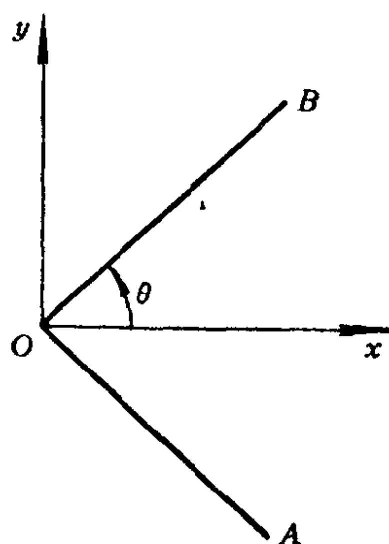


图 13

$$-u\sin\theta+v\cos\theta=0,$$

$$(\sigma_y-\sigma_x)\sin\theta\cos\theta+\tau_{xy}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=0,$$

则允许平移是

$$u=c\cos\theta,\quad v=c\sin\theta,$$

c是任意常数。

我们将在下章证明：若允许平移有两个自由度，则转移矩阵X有两个特征值$\lambda=1$，特征向量为g_1与g_2，其余特征值λ均满足$|\lambda|<1$；若允许平移有一个自由度，则只有一个特征值$\lambda=1$，对应的特征向量按允许平移而定，例如在图13的例子中，特征向量就是$g_1\cos\theta+g_2\sin\theta$。这些对应于$X$的特征向量，同时也是组合刚度矩阵$K_z$的零特征向量。

我们还将在下章证明：对于迭代法(3.3)—(3.5)，当转移矩阵X的所有特征值均满足$|\lambda|<1$时，则有

$$\lim_{l\to\infty} K_l = K_z. \tag{6.9}$$

如果矩阵X有特征值$\lambda=1$，则极限关系式(9.6)就不成立，必须通过§3中的办法计算$K_z^{(l)}$，这时当$k\geqslant 2^l$时，y_k等于矩阵X对应于$\lambda=1$的特征向量。对于角点问题，为了提高收敛速度，我们还可以在此区域内增加一些线性函数作为附加的自由度，其条件是这些线性函数必须满足两侧的位移边界条件(如果有位移边界条件的话)。

下面，对于平面弹性问题的无限元方法，我们用表格形式作一总结。表1是允许平移的自由度与转移矩阵X，组合刚度矩阵K_z的性质之间的关系。

表 1

自由度	X的特征值$\lambda=1$的重数	K_z
2	2	对称、半正定
1	1	对称、半正定
0	0	对称、正定

表 2

	自由度	特征值方法	第一类迭代法			第二类迭代法
			一	二	三	
角点	2	+	-	+	+	+
	1	+	-	+	+	+
	0	+	+	-	-	+
无界区域	2	+	-	+	-	-
	1	+	-	+	-	-
	0	+	+	-	-	+[注]
外问题	2	+	-	+	-	-

注：限于边界条件$u=0$

表2是关于各种方法的适用性，我们将§1中叙述的方法称

为特征值方法，§3中(3.3)—(3.5)称为第一类迭代法，(3.11)称为第二类迭代法．第一类迭代法又分三种，第一种有极限式(9.6)，第二种是引进了允许平移后，有极限式(3.8)，第三种是还可以再引进一些线性函数，使收敛得更快一些．我们考虑三种边值问题，第一种是角点问题，第二种是§6中讨论的无界区域问题，我们称之为无界区域问题，第三种是§1中讨论的外问题．我们以“+”号表示某一个方法适用于此种情况，以“-”号表示不适用．

最后，我们讨论外问题的Fourier方法．如图4作剖分以后，采用极坐标，在每一点以u_r, u_θ分别表示径向位移与沿圆周逆时针方向的位移，以f_r, f_θ分别表示上述两个方向的等效节点力(图14)．按照这些变量，我们计算一层的刚度矩阵．设在圆周上有n个节点，它们按辐角$\theta=0, \frac{2\pi}{n}, \cdots, \frac{2(n-1)\pi}{n}$均匀分布，则有

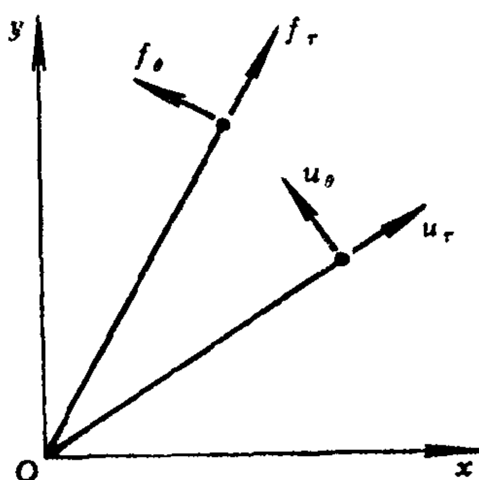


图 14

$$W_k=\frac{1}{2}(y_{k-1}^{\mathrm{T}}, y_k^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix} K_0 & -A^{\mathrm{T}} \\ -A & K_0' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{k-1} \\ y_k \end{pmatrix},$$

其中K_0, K_0', A都是$2n$阶矩阵，y_k为Γ_k上u_r, u_θ组成的$2n$维向量。

在下章我们将证明K_0, K_0', A都是块循环矩阵，即它们都是如下形状：

$$B=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ b_n & b_1 & \cdots & b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_2 & \cdots & b_n & b_1 \end{pmatrix},$$

其中 $b_i(i=1,\cdots,n)$ 是 2×2 的子矩阵．作酉矩阵

$$F=\frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix} I & I & \cdots & I \\ I & \omega I & \cdots & \omega^{n-1}I \\ I & \omega^2 I & \cdots & \omega^{2(n-1)}I \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ I & \omega^{n-1}I & \cdots & \omega^{(n-1)^2}I \end{pmatrix},$$

其中 I 是二阶单位阵，则类似于§2可以得块对角矩阵

$$\bar{F}BF=\operatorname{diag}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i,\sum_{i=1}^{n}\omega^{i-1}b_i,\cdots,\sum_{i=1}^{n}\omega^{(i-1)(n-1)}b_i\right).$$

令 $y_k=Fz_k$，以 $\bar{F}$ 左乘(1.6)的诸方程，就得到了(2.1)．所不同的是，现在 P_0,P,Q 都是块对角阵

$$P_0=\operatorname{diag}(P_0^{(1)},\cdots,P_0^{(n)}),$$
$$P=\operatorname{diag}(P^{(1)},\cdots,P^{(n)}),$$
$$Q=\operatorname{diag}(Q^{(1)},\cdots,Q^{(n)}),$$

其中 $P_0^{(i)},P^{(i)},Q^{(i)}$ 都是二阶子矩阵．令

$$z_k=\begin{pmatrix} z_k^{(1)} \\ \vdots \\ z_k^{(n)} \end{pmatrix},\qquad \bar{F}f_0=\begin{pmatrix} \varphi^{(1)} \\ \vdots \\ \varphi^{(n)} \end{pmatrix},$$

其中 $z_k^{(i)},\varphi^{(i)}$ 是二维列向量．将(2.1)写成 n 个无穷阶方程组 $(i=1,\cdots,n)$

$$\begin{aligned} &P_0^{(i)}z_0^{(i)}-\bar{Q}^{(i)\mathrm{T}}z_1^{(i)}=\varphi^{(i)}, \\ &-Q^{(i)}z_0^{(i)}+P^{(i)}z_1^{(i)}-\bar{Q}^{(i)\mathrm{T}}z_2^{(i)}=0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &-Q^{(i)}z_{k-1}^{(i)}+P^{(i)}z_k^{(i)}-\bar{Q}^{(i)\mathrm{T}}z_{k+1}^{(i)}=0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\tag{9.7}$$

存在二阶矩阵 $X^{(i)}(i=1,2,\cdots,n)$，使

$$z_{k+1}^{(i)}=X^{(i)}z_k^{(i)},\quad k=0,1,\cdots.$$

$X^{(i)}$满足方程

$$\bar{Q}^{(i)\mathrm{T}}(X^{(i)})^2 - P^{(i)}X^{(i)} + Q^{(i)} = 0.$$

我们将在下章中证明 $X^{(1)} = I$，而 $X^{(i)}(2 \leqslant i \leqslant n)$ 的特征值 λ 都满足 $|\lambda| < 1$。考虑矩阵束

$$\begin{pmatrix} P^{(i)} & -Q^{(i)} \\ I & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} \bar{Q}^{(i)\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

的广义特征值问题。利用 § 1 中的方法就可以求出 $X^{(i)}$。因为上述矩阵仅为四阶，所以计算量是很小的。然而，现在必须进行复数运算。

令

$$Z = \mathrm{diag}(X^{(1)}, X^{(2)}, \cdots, X^{(n)}),$$

则

$$z_{k+1} = Zz_k, \quad k = 0, 1, \cdots,$$

$$y_{k+1} = FZ\bar{F}y_k, \quad k = 0, 1, \cdots.$$

由此即得组合刚度矩阵

$$K_z = K_0 - A^{\mathrm{T}}FZ\bar{F}.$$

为了便于与其它单元衔接，y_0与 f_0 还是转换为直角坐标分量更方便一些。设一个节点的极坐标为(r, θ)，则

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \end{pmatrix} \equiv T(\theta) \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \end{pmatrix}.$$

等效节点力也有同样的关系式。因此，如果在直角坐标系中，位移向量是 y_0^*，等效节点力向量是 f_0^*，令

$$T^* = \mathrm{diag}\left(T(0), T\left(\frac{2\pi}{n}\right), \cdots, T\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right),$$

则

$$y_0^* = T^* y_0, \quad f_0^* = T^* f_0.$$

由 $K_z y_0 = f_0$ 可得

$$K_z^* y_0^* = f_0^*,$$

其中

$$K_z^* = T^* K_z (T^*)^{-1}.$$

§ 10　应力强度因子的计算

对于平面弹性角点问题，如果内角 $\alpha=2\pi$，并且局部是自由边界条件，这时就形成了一条裂纹(图15)。以O点作为裂纹尖端。当动点趋于O点时，应力会趋于无穷大。

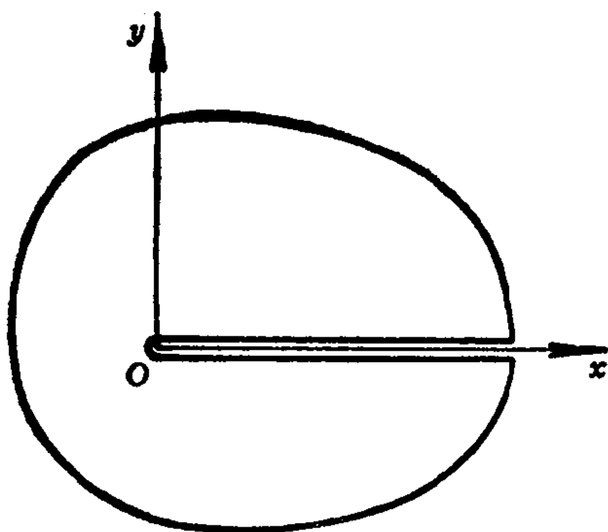


图　15

为了确定起见，我们设裂纹处于正 x 轴上。取极坐标，则定义第一型应力强度因子为

$$K_{\mathrm{I}}=\lim_{r\to 0}\sqrt{2\pi r}\,\sigma_y(r,\pi),\tag{10.1}$$

第二型应力强度因子为

$$K_{\mathrm{II}}=\lim_{r\to 0}\sqrt{2\pi r}\,\tau_{xy}(r,\pi).\tag{10.2}$$

按照弹性力学理论[41]，在O点附近的应力和位移可以展开为

$$\begin{pmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{pmatrix}=\sum_{j=1}^{\infty}r^{\frac{j}{2}-1}\left[a_1^{(j)}\varphi_1^{(j)}(\theta)+a_2^{(j)}\varphi_2^{(j)}(\theta)\right],\tag{10.3}$$

$$\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\sum_{j=0}^{\infty}r^{\frac{j}{2}}\left[a_1^{(j)}\psi_1^{(j)}(\theta)+a_2^{(j)}\psi_2^{(j)}(\theta)\right],\tag{10.4}$$

其中 $j=0$ 对应了平移，$\psi_1^{(0)}(\theta)$ 与 $\psi_2^{(0)}(\theta)$ 都是不依赖于 θ 的常数。在以上级数中，最重要的项是 $j=1$，在这一项中，$\psi_1^{(1)}(\theta)$ 对应了位移的对称分量，$\psi_2^{(1)}(\theta)$ 对应了位移的反对称分量，它们分别等于 $(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$

$$\psi_1^{(1)}(\theta)=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{8\pi\mu}}\sin\dfrac{\theta}{2}\left(\kappa-1+2\cos^2\dfrac{\theta}{2}\right) \\ \dfrac{1}{\sqrt{8\pi\mu}}\cos\dfrac{\theta}{2}\left(\kappa+1-2\sin^2\dfrac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}, \tag{10.5}$$

$$\psi_2^{(1)}(\theta)=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{8\pi\mu}}\cos\dfrac{\theta}{2}\left(\kappa+1+2\sin^2\dfrac{\theta}{2}\right) \\ \dfrac{1}{\sqrt{8\pi\mu}}\sin\dfrac{\theta}{2}\left(\kappa-1-2\cos^2\dfrac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}, \tag{10.6}$$

其中 κ 是一个常数，对于平面应变 $\kappa=3-4\nu$，对于平面应力 $\kappa=(3-\nu)(1+\nu)$，ν 为 Poisson 比。当 $j=1$ 时，应力的分布是

$$\varphi_1^{(1)}(\theta)=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\sin\dfrac{\theta}{2}\left(1+\cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{3\theta}{2}\right) \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\sin\dfrac{\theta}{2}\left(1-\cos\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{3\theta}{2}\right) \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{3\theta}{2} \end{pmatrix},$$

$$\varphi_2^{(1)}(\theta)=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos\dfrac{\theta}{2}\left(2-\sin\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{3\theta}{2}\right) \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{3\theta}{2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\sin\dfrac{\theta}{2}\left(1+\cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{3\theta}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

与(10.1),(10.2)比较可以看出恰有

$$a_1^{(1)} = K_{\mathrm{I}}, \quad a_2^{(1)} = K_{\mathrm{II}}.$$

为了便于应力强度因子的计算，取对称于 x 轴的剖分如图16。用§9中的方法可以计算出 y_0，设转移矩阵 X 的特征值按

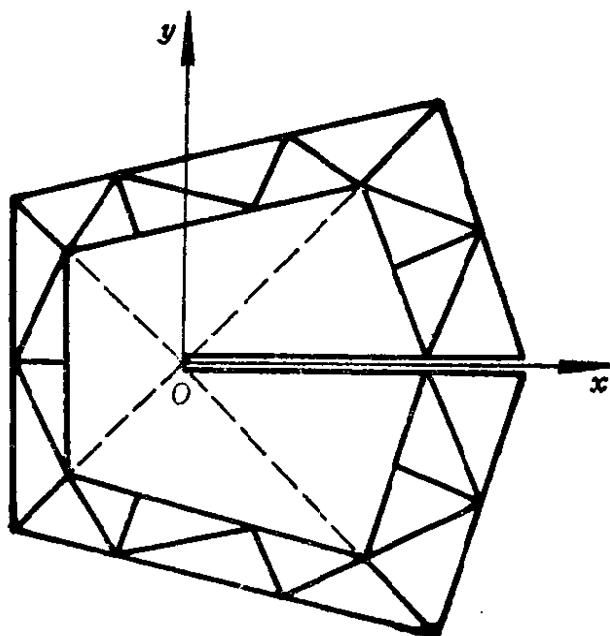


图 16

绝对值自大而小的顺序排列为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$，其中 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$，它们对应了特征向量 $g_1 = (1,0,1,0,\cdots,1,0)^{\mathrm{T}}$ 与 $g_2 = (0,1,0,1,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}}$，相当于平移。按照第三章中的理论，

$$\lambda_3 \doteq \xi^{1/2}, \quad \lambda_4 \doteq \xi^{1/2}, \quad \lambda_5 = \lambda_6 = \xi.$$

下面我们说明这几项的力学背景。

设 λ_3 的对应特征向量是 g_3，以它作为 Γ_0 上的位移向量，则由(1.7)，各相似多边形上的位移向量就是 $g_3, \lambda_3 g_3, \lambda_3^2 g_3, \cdots, \lambda_3^k g_3, \cdots$。从 O 点出发，通过 Γ_0 上一个节点，作一条射线。由相似性，这条射线与每个多边形 Γ_k 都相交于某一节点。这一系列节点与 O 点的距离与 ξ^k 成正比，于是

$$\text{位移} \sim \lambda_3^k = (\xi^k)^a \sim r^a,$$

其中 $a = \log\lambda_3/\log\xi \doteq 1/2$。由此可见，$\lambda_3, \lambda_4$ 恰好对应了(10.4)中的 $j=1$ 项。同理可以说明 λ_5, λ_6 对应了 $j=2$，相当于绕 O 点的

旋转与沿 x 轴的简单拉伸。

按照第三章中的理论，有一个特征向量对应于 $\psi_1^{(1)}(\theta)$，另一个对应于 $\psi_2^{(1)}(\theta)$。事实上，我们现在可以通过线性组合，使得 g_3 是位移对称的，而 g_4 是位移反对称的，即($i=0,1,\cdots$)

$$g_3^{(2i+1)}=g_3^{(2n-2i-1)},\quad g_3^{(2i+2)}=-g_3^{(2n-2i)},$$
$$g_4^{(2i+1)}=-g_4^{(2n-2i-1)},\quad g_4^{(2i+2)}=g_4^{(2n-2i)}.$$

如果 g_3,g_4 不满足上述条件，则其中必有一个既非对称，也非反对称，设它是 g_3。由剖分的对称性，

$$g_3^*=(g_3^{(2n-1)},-g_3^{(2n)},g_3^{(2n-3)},-g_3^{(2n-2)},\cdots,g_3^{(1)},-g_3^{(2)})$$

也是一个特征向量。$g_3+g_3^*$ 与 $g_3-g_3^*$ 即为所求。

将 y_0 按特征向量作分解

$$y_0=a_1g_1+a_2g_2+\cdots+a_{2n}g_{2n},\tag{10.7}$$

则对应于 $K_{\rm I}$ 的应变能是

$$W_{\rm I}=\frac{1}{2}(a_3g_3)^{\rm T}K_z(a_3g_3),\tag{10.8}$$

对应于 $K_{\rm II}$ 的应变能是

$$W_{\rm II}=\frac{1}{2}(a_4g_4)^{\rm T}K_z(a_4g_4).\tag{10.9}$$

另一方面，设 Γ_0 上各节点的直角坐标为 (x_i,y_i)，极坐标为 (r_i,θ_i) $(i=1,2,\cdots,n)$，又设向量 $(x_{i+1}-x_i,y_{i+1}-y_i)$ 的极坐标为 (s_i,α_i)，则通过积分，按照(9.3),(10.4)—(10.6)，我们也可以计算 $W_{\rm I}$ 与 $W_{\rm II}$，例如对于平面应变情形

$$W_{\rm I}=\frac{K_{\rm I}^2}{8\pi\mu}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\begin{vmatrix}x_i & y_i\\ x_{i+1} & y_{i+1}\end{vmatrix}}{s_i}$$
$$\times\left\{\left(1-2\nu+\frac{1}{2}\sin^2\alpha_i\right)\log\frac{1-\cos(\alpha_i-\theta_i)}{1-\cos(\alpha_i-\theta_{i+1})}\right.$$
$$+\frac{1}{2}(3-4\nu-\cos\alpha_i)(1+\cos\alpha_i)\log\frac{r_i}{r_{i+1}}$$

$$
\begin{aligned}
&-(1-2\nu)(\theta_{i+1}-\theta_i)\sin\alpha_i \\
&+\frac{1}{2}\cos(\alpha_i+\theta_{i+1})-\frac{1}{2}\cos(\alpha_i+\theta_i)\Big\},
\end{aligned}
\tag{10.10}
$$

$$
\begin{aligned}
W_{\mathrm{II}}=\frac{K_{\mathrm{II}}^2}{8\pi\mu}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\begin{vmatrix}x_i & y_i\\ x_{i+1} & y_{i+1}\end{vmatrix}}{s_i}
&\times\left\{\left(3-2\nu-\frac{3}{2}\sin^2\alpha_i\right)\log\frac{1-\cos(\alpha_i-\theta_i)}{1-\cos(\alpha_i-\theta_{i+1})}\right. \\
&+\left[3-2\nu-\frac{3}{2}\sin^2\alpha_i-(1-2\nu)\cos\alpha_i\right]\log\frac{r_i}{r_{i+1}} \\
&+(1-2\nu)(\theta_{i+1}-\theta_i)\sin\alpha_i \\
&\left.-\frac{3}{2}\cos(\alpha_i+\theta_{i+1})+\frac{3}{2}\cos(\alpha_i+\theta_i)\right\}.
\end{aligned}
\tag{10.11}
$$

比较(10.8)—(10.11)即可求出 K_{I}^2 与 K_{II}^2。这里要注意的是K_{I}永远是正的，因为负的 K_{I} 值意味着裂纹两侧的材料会互相侵入，这是没有物理意义的。而 K_{II} 的正负号是容易判定的，只要简单地看一下 a_4g_4 沿着裂纹的切向位移的方向就可以了。

如果弹性体具有如图 12 的对称性，这时 $K_{\mathrm{II}}=0$，只需计算一半。转移矩阵X只有一个特征值 $\lambda=1$，它的对应特征向量是 $(1,0,1,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$，也只有一个特征值 $\lambda\doteq\xi^{1/2}$。

最后，我们讨论分解式(10.7)中a_3g_3, a_4g_4 的计算方法，g_3, g_4 为转移矩阵X的特征向量，对应的特征值 λ_3,λ_4 是 $\xi^{1/2}$ 的近似。令

$$
a=(a_1,a_2,\cdots,a_{2n})^{\mathrm{T}},\quad T=(g_1,g_2,\cdots,g_{2n}),
$$

则(10.7)又可以写成

$$
y_0=Ta.
$$

因此

$$
a=T^{-1}y_0. \tag{10.12}
$$

设 T^{-1} 的第三行与第四行为$\tilde{g}_3^T,\tilde{g}_4^T$,则

$$a_3=\tilde{g}_3^T y_0,\quad a_4=\tilde{g}_4^T y_0.$$

由(1.13)

$$X^T=(T^{-1})^T\Lambda T^T,$$

即

$$X^T(T^{-1})^T=(T^{-1})^T\Lambda.$$

由此可以看出，$\tilde{g}_3,\tilde{g}_4$ 就是矩阵 X^T对应于特征值 λ_3,λ_4 的特征向量.

当矩阵X与 K_z 是按照§1或§2的方法求出时，因为已经求出了矩阵T，从(10.12)计算 a_3,a_4 是不困难的。当矩阵X与 K_z 是按照§3的方法求出时，因为事先没有解特征值问题，所以还需要求 $g_3,g_4,\tilde{g}_3,\tilde{g}_4$。在现在的情况下,已经知道 $\xi^{1/2}$ 与 λ_3, λ_4 很接近，所以用带原点位移的反幂法[36]可以得到很好的效果。求出X^T 的两个特征向量后，可以用前面的办法使 $\tilde{g}_3$ 是位移对称，$\tilde{g}_4$是位移反对称的。此外,我们还要选取适当的常数因子,使

$$\tilde{g}_3^T g_3=1,\quad \tilde{g}_4^T g_4=1.$$

§11 Stokes 外问题(一)

众所周知,对于定常的二维粘性绕流问题,有“Stokes 矛盾”,因此它是没有实际意义的。我们讨论三维问题。在三维问题中,较为简单的是轴对称流动，我们在本节讨论它的无限元解法。方程组是

$$\mu(-\nabla(x\nabla u)/x+u/x^2)+\partial p/\partial x=0, \tag{11.1}$$

$$-\mu\nabla(x\nabla v)/x+\partial p/\partial y=0, \tag{11.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(xu)+\frac{\partial}{\partial y}(xv)=0, \tag{11.3}$$

其中常数 $\mu>0$ 是粘性系数，(u,v)是速度场，p 是压力场，y 轴是旋转轴。在考虑绕流问题时，在无穷远处可以加边界条件$(u,$

$v) = (u_\infty, v_\infty)$。我们在速度场上加一个常向量，以 $u-u_\infty, v-v_\infty$ 作为新的速度场，因此，总可以认为在无穷远处速度等于零。

对于速度场，一般而言，不能取线性插值函数[47]。我们取三角形单元，以顶点及各边中点为节点(图17)，作二次插值，插值函数为

$$a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2,$$

六个系数恰好被六个节点值所唯一确定。在每个单元上，设压力 p 为一个常数。

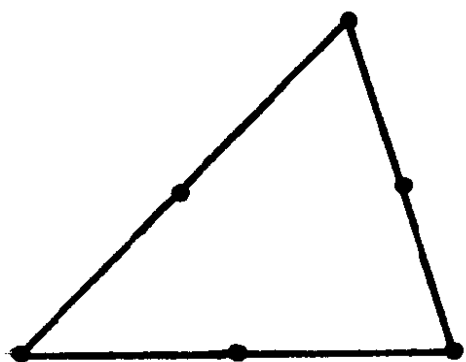


图 17

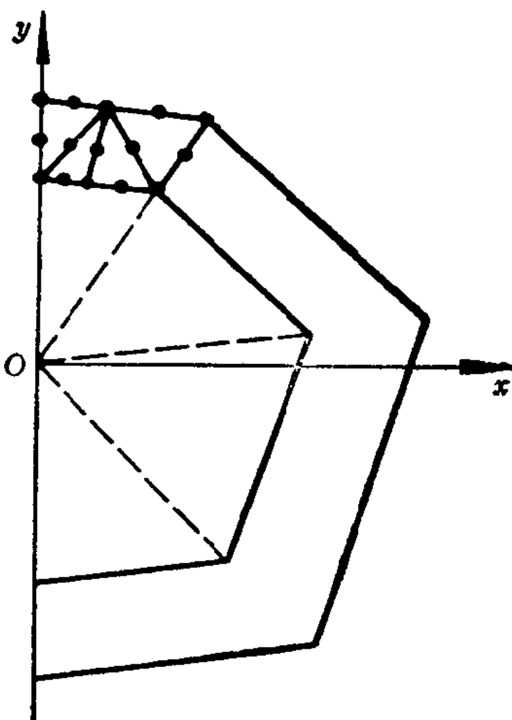


图 18

作剖分如图18。我们考虑由 Γ_{k-1} 与 Γ_k 所包围的第 k 层。设三角形单元共 N 个，则在 Γ_{k-1}(或 Γ_k)上有 $N+1$ 个节点。在第 k 层内部还有 $N+1$ 个节点。一层的节点总数共 $3(N+1)$ 个。由对称性，在 y 轴上 $u=0$，所以在 Γ_{k-1}(或 Γ_k) 上，速度分量共有 $2N$ 个自由度，我们将这些分量排成一个 $2N$ 维向量 y_{k-1}(或 y_k)。类似地，在中间节点上也有一个 $2N$ 维向量 y^*。

在方程组(11.1)—(11.3)中，压力可以允许差一个常数。为消除此不定因素，我们在第 k 层内指定一个单元上的压力等于

零。因此在第 k 层内，压力值构成了一个 $N-1$ 维向量，我们将它记作 q 。

在第一层内计算“应变能”积分，引进一些矩阵，则有

$$
\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2}\mu\int x\left(|\nabla u|\nabla^2 + |\nabla v|^2 + \frac{u^2}{x^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}(y_0^{\mathrm{T}}, y_1^{\mathrm{T}}, y^{*\mathrm{T}})\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12}^{\mathrm{T}} & L_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y^* \end{pmatrix}, \qquad (11.4)
\end{aligned}
$$

$$
-\int p\left(\frac{\partial}{\partial x}(xu) + \frac{\partial}{\partial y}(xv)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (y_0^{\mathrm{T}}, y_1^{\mathrm{T}}, y^{*\mathrm{T}})\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}q,
$$

其中 L_{11} 是 $4N$ 阶方阵，L_{22} 是 $2N$ 阶方阵，B_1 是 $4N\times(N-1)$ 矩阵，B_2 是 $2N\times(N-1)$ 矩阵。

考虑以下方程组

$$
L_{12}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} + L_{22}y^* + B_2 q = 0,
$$

$$
(B_1^{\mathrm{T}}, B_2^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y^* \end{pmatrix} = 0,
$$

可以解得

$$
y^* = -L_{22}^{-1}\left(L_{12}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} + B_2 q\right), \qquad (11.5)
$$

$$
B_2^{\mathrm{T}}L_{22}^{-1}B_2 q = (B_1^{\mathrm{T}} - B_2^{\mathrm{T}}L_{22}^{-1}L_{12}^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}.
$$

于是

$$
q = (B_2^{\mathrm{T}}L_{22}^{-1}B_2)^{-1}(B_1^{\mathrm{T}} - B_2^{\mathrm{T}}L_{22}^{-1}L_{12}^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}. \qquad (11.6)
$$

将(11.6)代入(11.5)，然后将(11.5)式代入(11.4)，就得到W通过 y_0, y_1 的表达式

$$
W = \frac{1}{2}(y_0^{\mathrm{T}}, y_1^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix} K_0 & -A^{\mathrm{T}} \\ -A & K_0' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}.
$$

第 k 层相应的组合刚度矩阵就是

$$\xi^{k-1}\begin{pmatrix} K_0 & -A^{\mathrm{T}} \\ -A & K_0' \end{pmatrix}.$$

Ω 上的组合刚度矩阵 K_z 的计算方法与 § 5 中的方法相近，在迭代法中需要考虑一些新的因素，在 Γ_0 上计算流量

$$\zeta = \int_{\Gamma_0} x(u\cos(\nu, x) + v\cos(\nu, y))\mathrm{d}s,$$

其中 ν 表示 Γ_0 上指向∞的法线方向。ζ 线性地依赖于 y_0，因此可以引进 $2N$ 维列向量 h，使

$$\zeta = h^{\mathrm{T}} y_0.$$

容易看出，在 Γ_k 上的流量为

$$\zeta = \xi^{2k} h^{\mathrm{T}} y_k.$$

设在 Γ_0 与 Γ_{2^l} 之间的 2^l 层的组合刚度矩阵为

$$\begin{pmatrix} K_l & -A_l^{\mathrm{T}} \\ -A_l & K_l' \end{pmatrix}.$$

在计算它的过程中，压力 p 在某一个单元上恒等于零。为确定起见，不妨设在第 2^l 层的某一个指定单元上。

记 $k = 2^l$，则在 $2k$ 层上的“应变能”是

$$W = \frac{1}{2}(y_0^{\mathrm{T}}, y_k^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix} K_l & -A_l^{\mathrm{T}} \\ -A_l & K_l' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_k \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{2}\xi^k(y_k^{\mathrm{T}}, y_{2k}^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix} K_l & -A_l^{\mathrm{T}} \\ -A_l & K_l' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_k \\ y_{2k} \end{pmatrix}. \qquad (11.7)$$

这里要注意的是，p 仅在一个单元上而不是在两个单元上恒等于零。现在既然在第 $2k$ 层的一个单元上 p 恒等于零，在前面第一至第 k 层上 p 在每个单元上都可以等于任意常数。将方程(11.3)在这 k 层上积分得

$$h^{\mathrm{T}} y_0 = \xi^{2k} h^{\mathrm{T}} y_k. \qquad (11.8)$$

因此，在取 W 的最小值的过程中，y_k 不是任意的。

引进 Lagrange 乘子 η，令

$$L = W + \eta h^{T}(\xi^{2k} y_k - y_0).$$

令 $\frac{\partial L}{\partial y_k} = 0, \frac{\partial L}{\partial \eta} = 0$，得(11.8)以及

$$-A_l y_0 + K'_l y_k + \xi^k(-A_l^T y_{2k} + K_l y_k) + \eta \xi^{2k} h = 0,$$

因此

$$y_k = (\xi^k K_l + K'_l)^{-1}(A_l y_0 + \xi^k A_l^T y_{2k} - \eta \xi^{2k} h). \quad (11.9)$$

以 (11.9)代入(11.8)得

$$h^T y_0 = \xi^{2k} h^T (\xi^k K_l + K'_l)^{-1}(A_l y_0 + \xi^k A_l^T y_{2k} - \eta \xi^{2k} h).$$

解得

$$\eta = \frac{\xi^{-4k}}{h^T(\xi^k K_l + K'_l)^{-1} h} h^T$$

$$\times \{\xi^{2k}(\xi^k K_l + K'_l)^{-1}(A_l y_0 + \xi^k A_l^T y_{2k}) - y_0\},$$

简记作

$$\eta = h_k^T y_0 + h_{2k}^T y_{2k},$$

其中 h_k 与 h_{2k} 为 $2N$ 维列向量。代入(11.9)得

$$y_k = (\xi^k K_l + K'_l)^{-1}\{A_l y_0 + \xi^k A_l^T y_{2k} - \xi^{2k} h(h_k^T y_0 + h_{2k}^T y_{2k})\}. \quad (11.10)$$

将它代入(11.7)并经过一些计算得

$$W = \frac{1}{2}(y_0^T, y_{2k}^T) \begin{pmatrix} K_{l+1} & -A_{l+1}^T \\ -A_{l+1} & K'_{l+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_{2k} \end{pmatrix},$$

其中

$$K_{l+1} = K_l - (A_l^T + \xi^{2k} h_k h^T)(\xi^k K_l + K'_l)^{-1}(A_l - \xi^{2k} h h_k^T), \quad (11.11)$$

$$K'_{l+1} = \xi^k K'_l - (\xi^k A_l + \xi^{2k} h_{2k} h^T) \times (\xi^k K_l + K'_l)^{-1}(\xi^k A_l^T - \xi^{2k} h h_{2k}^T), \quad (11.12)$$

$$A_{l+1} = \xi^k A_l (\xi^k K_l + K'_l)^{-1} A_l - \xi^{4k} h_{2k} h^T (\xi^k K_l + K'_l)^{-1} h h_k^T. \quad (11.13)$$

从 $l=0$ 开始，利用(11.11)—(11.13)可以逐次求出 2^l 层的组合刚度矩阵($l=1,2,\cdots$)。现在设对于某一自然数 l，已经求出了K_l，

K_l' 与 A_l。

任取一向量 $g\in \boldsymbol{R}^{2N}$，使 $h^{\mathrm{T}}g\neq 0$。例如可以取 $g=\varepsilon_1$，其中 $\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$。令 $y_{2^l}=a\varepsilon_1$，其中 a 为一常数。则由(11.8)得

$$h^{\mathrm{T}}y_0=a\xi^{2^{l+1}}h^{\mathrm{T}}\varepsilon_1, \tag{11.14}$$

即

$$a=\xi^{-2^{l+1}}\frac{h^{\mathrm{T}}y_0}{h^{\mathrm{T}}\varepsilon_1}.$$

这时

$$\begin{aligned} W&=\frac{1}{2}(y_0^{\mathrm{T}},a\varepsilon_1^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix}K_l & -A_l^{\mathrm{T}}\\ -A_l & K_l'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_0\\ a\varepsilon_1\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{2}\left(y_0^{\mathrm{T}},\frac{\xi^{-2^{l+1}}}{h^{\mathrm{T}}\varepsilon_1}y_0^{\mathrm{T}}h\varepsilon_1^{\mathrm{T}}\right)\begin{pmatrix}K_l & -A_l^{\mathrm{T}}\\ -A_l & K_l'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_0\\ \dfrac{\xi^{-2^{l+1}}}{h^{\mathrm{T}}\varepsilon_1}\varepsilon_1h^{\mathrm{T}}y_0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

整理得

$$W=\frac{1}{2}y_0^{\mathrm{T}}K_z^{(l)}y_0,$$

其中

$$K_z^{(l)}=K_l-\frac{\xi^{-2^{l+1}}}{h^{\mathrm{T}}\varepsilon_1}(h\varepsilon_1^{\mathrm{T}}A_l+A_l^{\mathrm{T}}\varepsilon_1h^{\mathrm{T}})+\frac{\xi^{-2^{l+2}}}{(h^{\mathrm{T}}\varepsilon_1)^2}h\varepsilon_1^{\mathrm{T}}K_l'\varepsilon_1h^{\mathrm{T}}.$$

我们将在下章证明

$$\lim_{l\to\infty}K_z^{(l)}=K_z.$$

对于第二类迭代法，类似于§5，同样有

$$y_0^{\mathrm{T}}K_zy_0=\min_{w}\left\{(y_0^{\mathrm{T}},w^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix}K_l & -A_l^{\mathrm{T}}\\ -A_l & K_l'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_0\\ w\end{pmatrix}+\xi^{2^l}w^{\mathrm{T}}K_zw\right\}. \tag{11.15}$$

但是现在 w 不是任取的，由(11.8)，它受到

$$h^{\mathrm{T}}y_0=\xi^{2^{l+1}}h^{\mathrm{T}}w \tag{11.16}$$

的约束。引进 Lagrange 乘子 η，令

$$L=(y_0^{\mathrm{T}},w^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix}K_l & -A_l^{\mathrm{T}}\\ -A_l & K_l'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_0\\ w\end{pmatrix}+\xi^{2^l}w^{\mathrm{T}}K_zw$$

$$+\eta h^{\mathrm{T}}(\xi^{2^{l+1}}w-y_0).$$

令 $\dfrac{\partial L}{\partial w}=0$，$\dfrac{\partial L}{\partial \eta}=0$，得(11.16)以及

$$-2A_l y_0+2K'_l w+2\xi^{2^l}K_z w+\eta\xi^{2^{l+1}}h=0.$$

因此

$$w=(\xi^{2^l}K_z+K'_l)^{-1}\left(A_l y_0-\frac{1}{2}\eta\xi^{2^{l+1}}h\right). \qquad (11.17)$$

代入(11.16)得

$$h^{\mathrm{T}}y_0=\xi^{2^{l+1}}h^{\mathrm{T}}(\xi^{2^l}K_z+K'_l)^{-1}\left(A_l y_0-\frac{1}{2}\eta\xi^{2^{l+1}}h\right).$$

解得

$$\eta=\frac{2\xi^{-2^{l+2}}}{h^{\mathrm{T}}(\xi^{2^l}K_z+K'_l)^{-1}h}h^{\mathrm{T}}\{\xi^{2^{l+1}}(\xi^{2^l}K_z+K'_l)^{-1}A_l y_0-y_0\},$$

简记作

$$\eta=2r_l^{\mathrm{T}}y_0,$$

其中 r_l 为 $2N$ 维列向量。代入(11.17)式得

$$w=(\xi^{2^l}K_z+K'_l)^{-1}(A_l y_0-\xi^{2^{l+1}}hr_l^{\mathrm{T}}y_0). \qquad (11.18)$$

代入(11.15)，并经过一些计算得

$$K_z=K_l-(A_l^{\mathrm{T}}-\xi^{2^{l+1}}r_l h^{\mathrm{T}})(\xi^{2^l}K_z+K'_l)^{-1}(A_l+\xi^{2^{l+1}}hr_l^{\mathrm{T}}).$$

于是有迭代格式

$$K_z^{(m+1)}=K_l-(A_l^{\mathrm{T}}-\xi^{2^{l+1}}r_l h^{\mathrm{T}})(\xi^{2^l}K_z^{(m)}+K'_l)^{-1}$$
$$\times(A_l+\xi^{2^{l+1}}hr_l^{\mathrm{T}}).$$

我们将在下章证明：只要 $K_z^{(0)}$ 是对称半正定矩阵，就有

$$\lim_{m\to\infty}K_z^{(m)}=K_z.$$

下面给出转移矩阵 X 的计算方法。在(11.10)中取 $l=0$，$k=1$，则有方程

$$-(A-\xi^2hh_1^{\mathrm{T}})y_0+(\xi K_0+K_0')y_1-(\xi A^{\mathrm{T}}-\xi^2hh_2^{\mathrm{T}})y_2=0.$$

将关系式

$$y_k=X^k y_0,\qquad k=1,2,\cdots$$

代入，得X满足的方程

$$(\xi A^{\mathrm{T}}-\xi^2hh_2^{\mathrm{T}})X^2-(\xi K_0+K_0')X+(A-\xi^2hh_1^{\mathrm{T}})=0.$$

注意到所有特征值λ都满足$|\lambda|<\xi^{-\frac{1}{2}}$，可以用§1中的方法求矩阵$X$. 在已知$K_z$的条件下，求$X$就更为简单。在(11.18)中令$l=0$，得

$$y_1=(\xi K_z+K_0')^{-1}(A-\xi^2hr_0^{\mathrm{T}})y_0,$$

因此

$$X=(\xi K_z+K_0')^{-1}(A-\xi^2hr_0^{\mathrm{T}}).$$

组合单元与其它常规单元的联结方式是这样的：设常规单元占据的区域是Ω^*，并且设Ω^*上节点速度组成向量z，单元上的压力组成向量q. 令

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega^*}x\left(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2+\frac{u^2}{x^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}z^{\mathrm{T}}K^*z,$$

$$-\int_{\Omega^*}p\left(\frac{\partial}{\partial x}(xu)+\frac{\partial}{\partial y}(xv)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=z^{\mathrm{T}}B^*q.$$

区域Ω与Ω^*合并为区域Ω_0，在Ω_0的边界上速度是已知的. 向量y_0的分量中，有一部分与z的分量重合，有一部分是边界速度，z的分量中也有一部分是边界速度. 设向量z_1由z的内部速度分量组成。令

$$W=\frac{1}{2}y_0^{\mathrm{T}}K_zy_0+\frac{1}{2}z^{\mathrm{T}}K^*z+z^{\mathrm{T}}B^*q,$$

然后令$\dfrac{\partial W}{\partial z_1}=0$以及$\dfrac{\partial W}{\partial q}=0$，就得到了一个代数方程组，求解得$z_1$与$q$。

我们将在下章证明上述算法的合理性。

§12 不相似问题

我们考虑 Helmholtz 方程

$$-\Delta u+\lambda u=0 \tag{12.1}$$

的无限元解法，其中 λ 是一个复数。由于各层的刚度矩阵不一致，前面各节中的方法不适用于这个方程。

以角点问题为例，设图 9 中 Γ^* 与 Γ_* 上的边界条件是$\frac{\partial u}{\partial \nu}=0$。作如图10的剖分。第 k 层的刚度矩阵是

$$\begin{pmatrix} K_0 & -A^{\mathrm{T}} \\ -A & K_0' \end{pmatrix}+\lambda\xi^{2(k-1)}\begin{pmatrix} L_0 & -D^{\mathrm{T}} \\ -D & L_0' \end{pmatrix},$$

其中矩阵 K_0, K_0', A 与 §7 中的相同，第二个矩阵是一个对称正定矩阵。类似于(1.6)，我们得到方程组

$$(K_0+\lambda L_0)y_0-(A^{\mathrm{T}}+\lambda D^{\mathrm{T}})y_1=f_0, \tag{12.2$_0$}$$

$$-(A+\lambda D)y_0+(K+\lambda L)y_1-(A^{\mathrm{T}}+\lambda\xi^2D^{\mathrm{T}})y_2=0, \tag{12.2$_1$}$$

……………………………………………………

$$-(A+\lambda\xi^{2(k-1)}D)y_{k-1}+(K+\lambda\xi^{2(k-1)}L)y_k$$
$$-(A^{\mathrm{T}}+\lambda\xi^{2k}D^{\mathrm{T}})y_{k+1}=0, \tag{12.2$_k$}$$

……………………………………………………

其中 $K=K_0'+K_0, \quad L=L_0'+\xi^2L_0$。

如果 λ 不是区域 Ω 上方程(12.1)的特征值，就存在矩阵 $X(\lambda)$，使

$$y_1=X(\lambda)y_0.$$

并且如果 λ 是实数，$X(\lambda)$就是一个实矩阵。作相似变换

$$x\to\xi^{-k}x, \quad y\to\xi^{-k}y,$$

则 Γ_k 变成了 Γ_0，方程(12.1)变成了

$$-\Delta u+\lambda\xi^{2k}u=0, \tag{12.3}$$

因此如果 $\lambda\xi^{2k}$不是区域 Ω 上的特征值，就有

$$y_{k+1}=X(\lambda\xi^{2k})y_k.$$

如果 $\lambda,\lambda\xi^2$ 不是特征值，由(12.2)$_1$ 得

$$-(A+\lambda D)+(K+\lambda L)X(\lambda)-(A^{\mathrm{T}}+\lambda\xi^2 D^{\mathrm{T}})X(\lambda\xi^2)X(\lambda)=0. \tag{12.4}$$

我们将在下章证明 $X(\lambda)$是 λ 的解析函数，因此在 $\lambda=0$ 附近 $X(\lambda)$可以展开成幂级数

$$X(\lambda)=X_0+\lambda X_1+\cdots+\lambda^m X_m+\cdots, \tag{12.5}$$

其中 $X_0=X(0)$，它就是在§7中已经求出的转移矩阵X. 以(12.5)代入(12.4)，并且按 λ 的幂次整理得方程组

$$-A+KX_0-A^{\mathrm{T}}X_0^2=0,$$

$$D+KX_1+LX_0-A^{\mathrm{T}}(X_0X_1+\xi^2X_1X_0)-\xi^2D^{\mathrm{T}}X_0^2=0.$$

$$\cdots\cdots$$

一般地有

$$KX_m+LX_{m-1}-A^{\mathrm{T}}\sum_{i=0}^{m}\xi^{2i}X_iX_{m-i}$$

$$-\xi^2D^{\mathrm{T}}\sum_{i=0}^{m-1}\xi^{2i}X_iX_{m-i-1}=0,$$

$$m=2,3,\cdots,$$

其中第一个方程我们已在§7中解出，从第二个方程开始，它们依次是 $X_1,X_2,\cdots$满足的线性方程. 可以归纳成如下形状：

$$J_mX_m+A_m^{\mathrm{T}}X_mM_m=F_m.$$

若以$(A_m^{\mathrm{T}})^{-1}$左乘之，就得到标准形式的方程

$$(A_m^{\mathrm{T}})^{-1}J_mX_m+X_mM_m=(A_m^{\mathrm{T}})^{-1}F_m.$$

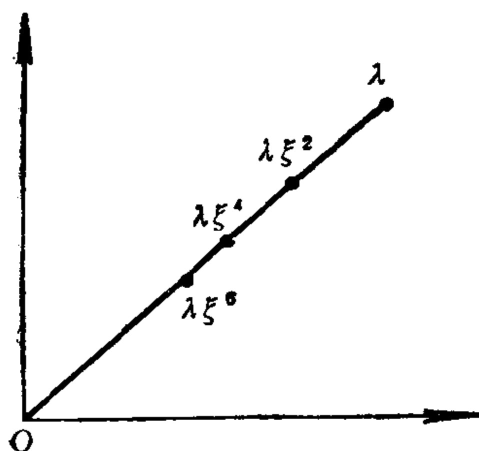


图 19

解之即得 X_m.

(12.5)式表示了在O点邻域内的 $X(\lambda)$. 对于绝对值较大的 λ 值，可以由方程式(12.4)从 $X(\lambda\xi^2)$求$X(\lambda)$. 只要 $\lambda,\lambda\xi^2,\cdots,\lambda\xi^{2k}$ 都不是特征值，k充分大，$X(\lambda\xi^{2k})$可以由(12.5)求出，然设 Ω_ξ 是由 Γ_1,Γ^* 与Γ_*包围的区

后就可以用(12.4)作为递推关系式。

令

$$K_z(\lambda)=(K_0+\lambda L_0)-(A^{\mathrm{T}}+\lambda D^{\mathrm{T}})X(\lambda),$$

它就是区域 Ω 上的组合刚度矩阵。

如果我们要计算解在 O 点的奇性，则可以将解表示为

$$y_k\sim\alpha(\lambda)g_1+\beta(\lambda)g_2\lambda_2^k, \tag{12.6}$$

其中 $g_1=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$，对应了特征值 $\lambda_1=1$；λ_2,g_2 为代表了解的奇性的特征值与特征向量。$\alpha(\lambda)$ 与 $\beta(\lambda)$ 由 y_0 所决定，所以有解析函数 $\alpha_1(\lambda),\alpha_2(\lambda),\cdots,\alpha_n(\lambda);\beta_1(\lambda),\beta_2(\lambda),\cdots,\beta_n(\lambda)$，使

$$\alpha(\lambda)=(\alpha_1(\lambda),\alpha_2(\lambda),\cdots,\alpha_n(\lambda))y_0, \tag{12.7}$$

$$\beta(\lambda)=(\beta_1(\lambda),\beta_2(\lambda),\cdots,\beta_n(\lambda))y_0. \tag{12.8}$$

在§10中，我们已经针对平面弹性问题给出了计算 $\alpha_1(0),\alpha_2(0),\cdots,\alpha_n(0);\beta_1(0),\beta_2(0),\cdots,\beta_n(0)$ 的方法。对于 $\lambda\neq0$，可以用如下的幂级数方法计算。

作相似变换

$$x\to\xi^{-1}x,\quad y\to\xi^{-1}y,$$

则 Γ_1 变成了 Γ_0，方程(12.1)变成了

$$-\Delta u+\lambda\xi^2u=0. \tag{12.9}$$

令 $z_k=y_{k+1}(k=0,1,\cdots)$，则 z_k 就是对应了方程(12.9)的无限元解。由(12.6)得

$$z_k\sim\alpha(\lambda)g_1+\lambda_2\beta(\lambda)g_2\lambda_2^k.$$

由(12.7),(12.8)

$$\alpha(\lambda)=(\alpha_1(\lambda\xi^2),\alpha_2(\lambda\xi^2),\cdots,\alpha_n(\lambda\xi^2))z_0, \tag{12.10}$$

$$\lambda_2\beta(\lambda)=(\beta_1(\lambda\xi^2),\beta_2(\lambda\xi^2),\cdots,\beta_n(\lambda\xi^2))z_0. \tag{12.11}$$

由(12.7),(12.10)得

$$(\alpha_1(\lambda),\alpha_2(\lambda),\cdots,\alpha_n(\lambda))=(\alpha_1(\lambda\xi^2),\alpha_2(\lambda\xi^2),\cdots,\alpha_n(\lambda\xi^2))X(\lambda). \tag{12.12}$$

由(12.8),(12.11)得

$$\lambda_2(\beta_1(\lambda),\beta_2(\lambda),\cdots,\beta_n(\lambda))$$

$$=(\beta_1(\lambda\xi^2),\beta_2(\lambda\xi^2),\cdots,\beta_n(\lambda\xi^2))X(\lambda).$$

在 $\lambda=0$ 附近，记

$$(\alpha_1(\lambda),\alpha_2(\lambda),\cdots,\alpha_n(\lambda))=\sum_{m=0}^{\infty}a_m\lambda^m,$$

其中 a_m 是 n 维行向量．代入到(12.12)式，并且注意到(12.5)得

$$\sum_{m=0}^{\infty}a_m\lambda^m=\sum_{m=0}^{\infty}a_m(\lambda\xi^2)^m\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^mX_m$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m\sum_{i=0}^{m}\xi^{2i}a_iX_{m-i}.$$

我们得方程组

$$a_m=\sum_{i=0}^{m}\xi^{2i}a_iX_{m-i},\quad m=1,2,\cdots,$$

即

$$a_m=\left(\sum_{i=0}^{m-1}\xi^{2i}a_iX_{m-i}\right)(I-\xi^{2m}X_0)^{-1},\quad m=1,2,\cdots.$$

同理，令

$$(\beta_1(\lambda),\beta_2(\lambda),\cdots,\beta_n(\lambda))=\sum_{m=0}^{\infty}b_m\lambda^m,$$

则有

$$b_m=\left(\sum_{i=0}^{m-1}\xi^{2i}b_iX_{m-i}\right)(\lambda_2I-\xi^{2m}X_0)^{-1},\quad m=1,2,\cdots.$$

下面我们讨论与(12.1)相关的特征值问题．设区域 Ω_0 有一角点 O，Ω_0 可以分割为 Ω^* 与 Ω，其中 Ω 包含 O 点．在 Ω 上作无限的三角形相似剖分，在 Ω^* 上作常规的有限三角形剖分(图20)．为简单起见，不妨设在边界上都给边界条件 $u=0$．记绝对值最小的特征值为 μ，对应的特征函数是 u_1，它们在 Ω_0 上满足方程

$$-\Delta u_1+\mu u_1=0.\tag{12.13}$$

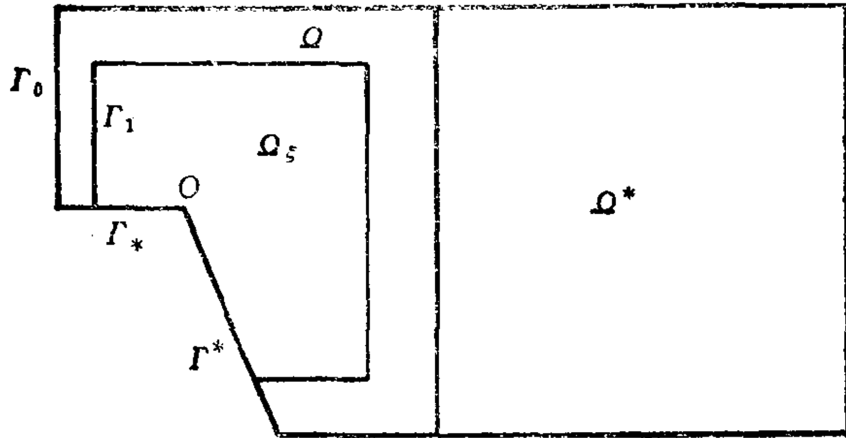


图 20

域，以 Ω 或 Ω_ξ 代替区域Ω_0，可以考虑类似的特征值问题。设相应的特征值为 μ_1 与 μ_2。我们将在下章证明 μ,μ_1,μ_2 都是负数，并且

$$|\mu|\leqslant|\mu_1|<|\mu_2|. \qquad (12.14)$$

首先设$|\mu|<|\mu_1|$。这时可以限制 λ 满足$|\lambda|<|\mu_1|$，因此

$$y_1 = X(\lambda)y_0. \qquad (12.15)$$

设$\bar{\Omega}^*\backslash\partial\Omega_0$上的节点值排列成向量$y^*$，$\Omega^*$上的刚度矩阵为$K^*(\lambda)$，则 Ω^* 与第一层上的应变能就是

$$W(\lambda) = \frac{1}{2}(y^*)^{\mathrm{T}}K^*(\lambda)y^*$$

$$+\frac{1}{2}(y_0^{\mathrm{T}},y_1^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix} K_0+\lambda L_0 & -A^{\mathrm{T}}-\lambda D^{\mathrm{T}} \\ -A-\lambda D & K_0'+\lambda L_0' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}, \qquad (12.16)$$

其中 y_0 的一部分分量等于零，另一部分分量包含在 y^* 中。

现在设 u_1 是(12.13)的无限元解，就有$\dfrac{\partial W(\lambda)}{\partial y^*}=0$。(12.16)式是包含 y^* 与 y_1 的二次型，因此它的微商是一次型：

$$\frac{\partial W(\lambda)}{\partial y^*} = A(\lambda)y^* + B(\lambda)y_1,$$

其中 $A(\lambda),B(\lambda)$是依赖于 λ 的矩阵。以(12.15)代入得

$$A(\lambda)y^* + B(\lambda)X(\lambda)y_0 = 0,$$

或

$$C(\lambda)y^* = 0, \tag{12.17}$$

其中 $C(\lambda)$ 为一方阵，依赖于 λ。y^* 是方程(12.17)的非零解，所以 μ 是方程 $\det C(\mu) = 0$ 的根。这个方程的根不是唯一的，我们求出绝对值最小的那一个，设为 μ^*。因为 μ 是根，所以 $|\mu^*| \leqslant |\mu|$。另一方面，从(12.17)可以导出 $\dfrac{\partial W(\mu^*)}{\partial y^*} = 0$，因此 μ^* 是特征值，即有 $\mu^* = \mu$。

为计算 μ，可以用拟牛顿迭代法。取 $\mu^{(0)} = 1, \mu^{(1)} = 0$，然后用迭代格式

$$\mu^{(m+1)} = \mu^{(m)} - \frac{\det C(\mu^{(m)})(\mu^{(m)} - \mu^{(m-1)})}{\det C(\mu^{(m)}) - \det C(\mu^{(m-1)})},$$

$$m = 1, 2, \cdots,$$

即可求出 μ。

其次设 $\mu = \mu_1$。这时(12.15)式不成立，上述方法已不适用。可以将 Ω^* 与第一层合并，作为新的区域 Ω^*，将第二层作为第一层，下面是它的一个特殊情形：

当 $\Omega_0 = \Omega$ 时，在第一层与第二层上的应变能是

$$W(\lambda) = \frac{1}{2}(y_1^{\mathrm{T}}, y_2^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix} K_0 + \lambda\xi^2 L_0 & -A^{\mathrm{T}} - \lambda\xi^2 D^{\mathrm{T}} \\ -A - \lambda\xi^2 D & K_0' + \lambda\xi^2 L_0' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{2} y_1^{\mathrm{T}}(K_0' + \lambda L_0')y_1.$$

令 $\dfrac{\partial W(\lambda)}{\partial y} = 0$ 得

$$(K + \lambda L)y_1 - (A^{\mathrm{T}} + \lambda\xi^2 D^{\mathrm{T}})y_2 = 0.$$

以 $y_2 = X(\lambda\xi^2)y_1$ 代入得

$$\{(K + \lambda L) - (A^{\mathrm{T}} + \lambda\xi^2 D^{\mathrm{T}})X(\lambda\xi^2)\}y_1 = 0.$$

其系数矩阵恰好与方程(12.4)的一样。我们得出如下结论：当方程(12.4)的系数矩阵奇异时，λ 恰为特征值。

附　记

本章内容主要取材自[4],[7],[8],[10],[17],[19],[20],[25],[26],[27]与[31]，但是作了重新组织，同时补充了一些新材料。有关的证明放到了第二章，本章只介绍算法。

第一至第三节代表了三种典型的算法：特征值方法、Fourier方法与迭代法。它们主要是在[4],[17],[7],[26]与[19]中介绍的。为了便于阅读，在这三节中我们只就一个典型的例子进行叙述，即二维Laplace外问题。这个问题的无限元方法最早见于[5]与[10]。它的简单之处在于方程较简单，不涉及边界条件，并且便于使用Fourier方法。

我们在第四至第七节、第九节以及第十一节中介绍了关于各种方程与各种边界条件的无限元方法。因为算法仍然是上面三种，我们在这几节中着重介绍在求解过程中它们的特点。我们希望这几节不仅使读者了解一些边值问题的无限元方法，而且能够达到举一反三的效果，对于我们没有涉及到的方程与边界条件，读者也能参照这几节的方法处理。在这几节中，等参单元最早见于[8]，角点问题最早见于[2]与[4]，平面弹性问题最早见于[4]，Stokes外问题最早见于[27]。

第八节的材料来自[10]，第十节的材料来自[4]与[26]，第十二节的材料来自[20]与[31]，它们是上述无限元方法的一些拓广及应用。其中应力强度因子的计算是推动无限元方法诞生的一个动力。

第二章 算法基础

§1 无限元空间

我们在本章中证明第一章的公式及结论。以后我们总是以C记通用的常数，它们在不同场合可以取不同值，如果有必要区别它们时，则记作C_1, C_2等。设$x=(x_1,\cdots,x_d)$是空间$\boldsymbol{R}^d$中的点，$d=2,3$，$\Omega\subset\boldsymbol{R}^d$是一个开集。以$C_0^\infty(\Omega)$表示$\Omega$上无穷次可微的紧支集函数的集合，并使用通常的Соболев空间的记号$H^s(\Omega)$与$W^{m,p}(\Omega)$，并且记

$$|u|_{k,p,\Omega}=\left\{\int_\Omega|\partial^k u|^p\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}},\quad k\geqslant 0, p\geqslant 1,$$

$$|u|_{k,\infty,\Omega}=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|\partial^k u|,\quad k\geqslant 0,$$

$$\|u\|_{m,p,\Omega}=\left\{\sum_{k=0}^m|u|_{k,p,\Omega}^p\right\}^{\frac{1}{p}},\quad m\geqslant 0,\ p\geqslant 1,$$

$$\|u\|_{m,\infty,\Omega}=\max_{0\leqslant k\leqslant m}|u|_{k,\infty,\Omega},$$

其中

$$|\partial^k u|=\sum_{|\alpha|=k}\left|\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_d^{\alpha_d}}\right|,\quad |\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_d.$$

当$p=2$时，以上范数及半范数可以记作$\|u\|_{m,\Omega}$与$|u|_{k,\Omega}$。当s为任意实数时，$H^s(\Omega)$中的范数记作$\|\cdot\|_{s,\Omega}$。在不致引起误会的地方，以上记号中Ω可不写。

对于无界区域$\Omega\subset\boldsymbol{R}^3$，当$u\in C_0^\infty(\Omega)$，有以下不等式[51]：

$$\int_\Omega\frac{u^2(x)}{|x-y|^2}\mathrm{d}x\leqslant 4\int_\Omega|\nabla u(x)|^2\mathrm{d}x,\qquad(1.1)$$

其中 $y\in \boldsymbol{R}^3$ 为任意点，$|\cdot|$表示向量的 Euclid 模。对于平面区域

$$\Omega=\{1<|x|<\infty\}\subset \boldsymbol{R}^2,$$

当 $u\in C_0^\infty(\Omega)$，有以下不等式[51]：

$$\int_{|x|>1}\frac{u^2(x)}{|x|^2\log^2|x|}\mathrm{d}x\leqslant 4\int_{|x|>1}|\nabla u(x)|^2\mathrm{d}x. \qquad (1.2)$$

不等式(1.1)，(1.2)对于我们讨论无界区域上的各种边值问题是非常有用的。

对于外部区域 $\Omega\subset \boldsymbol{R}^2$，总可以认为它在$\{1<|x|<\infty\}$内。设 Ω 的边界$\partial\Omega$是 $\boldsymbol{R}^2$中的简单闭曲线，并且满足 Lipschitz 条件。以$\bar{\Omega}$记 Ω 的闭包，以 $C_0^\infty(\bar{\Omega})$记 $\bar{\Omega}$ 上无穷次可微的紧支集函数的集合。对于 $u\in C_0^\infty(\bar{\Omega})$，我们赋以范数

$$\|u\|_{1,*}=\left(\int_\Omega\left(|\nabla u(x)|^2+\frac{u^2(x)}{|x|^2\log^2|x|}\right)\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

相应地引进内积，然后按此范数完备化，得到一个 Hilbert 空间，记作 $H^{1,*}(\Omega)$。可以证明（参看[51]），$H^{1,*}(\Omega)$的等价的定义是

$$H^{1,*}(\Omega)=\{u\in H^1_{loc}(\Omega);\ \|u\|_{1,*}<+\infty\}.$$

当 $u\in H^{1,*}(\Omega)$，以 $u|_{\partial\Omega}$ 记 u 在 $\partial\Omega$ 上的迹。作 $H^{1,*}(\Omega)$的子空间

$$H_0^{1,*}(\Omega)=\{u\in H^{1,*}(\Omega);\ u|_{\partial\Omega}=0\}.$$

现在，考察 $H^{1,*}(\Omega)$的无限元子空间，设 $\partial\Omega=\Gamma_0$ 关于 O 点是星形的，即 Γ_0 上每一点与 O 点联线都整个包含在 Γ_0 内部。按照第一章§1的办法作三角形剖分。以 $\xi^k\Omega$ 记 Γ_k 的外部区域，并记 $\Omega_k=\xi^{k-1}\Omega\backslash\overline{\xi^k\Omega}$。以 $e_1,e_2,\cdots$记各三角形单元。对于任一开集Ω'，记 $P_m(\Omega')$为 Ω' 上全体不高于 m 次的多项式的集合。定义无限元空间

$$S(\Omega)=\{u\in H^{1,*}(\Omega);\ u|_{e_i}\in P_1(e_i), i=1,2,\cdots\},$$

$$S_0(\Omega)=\{u\in S(\Omega);\ u|_{\partial\Omega}=0\},$$

$$S(\Gamma_k)=\{u|_{\Gamma_k};\ u\in S(\Omega)\}.$$

当 $u\in S(\Omega)$，象第一章一样，我们将 u 在 Γ_k 的节点上的值排成一个列向量 y_k。记 $y_k=B_k u$。显然，$S(\Gamma_k)$中每一个元素与一个 $y_k\in \boldsymbol{R}^n$ 对应。我们将 y_k 与 $u|_{\Gamma_k}$ 等同看待而不加以区别。

引理1.1 设 $u\in S(\Omega)$，$y_k=B_k u$，则存在与 u 无关的常数 C，使

$$\frac{1}{C}\sum_{k=1}^{\infty}|y_k-y_{k-1}|^2\leqslant\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\leqslant C\sum_{k=0}^{\infty}|y_k|^2. \quad (1.3)$$

证明 任取一个三角形单元 $e_j\subset\Omega_k$，由图 2，它有一边指向 O 点，设这条边长为 L。以 meas e_j 记三角形 e_j 的面积，ρ为三角形 e_j 的最短高的长度。设 u 在指向 O 点的这一条边的端点上的值为 $y_{k-1}^{(i)}$ 与 $y_k^{(i)}$，则有

$$\frac{|y_k^{(i)}-y_{k-1}^{(i)}|}{L}\leqslant|\nabla u|\leqslant\frac{|y_k|+|y_{k-1}|}{\rho}.$$

因此

$$\frac{\text{meas }e_j}{L^2}|y_k^{(i)}-y_{k-1}^{(i)}|^2\leqslant\int_{e_j}|\nabla u|^2\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\frac{\text{meas }e_j}{\rho^2}(|y_k|+|y_{k-1}|)^2.$$

由相似性，$\frac{\text{meas }e_j}{L^2}$，$\frac{\text{meas }e_j}{\rho^2}$只依赖于 e_j 在 Ω_k 中的位置，与 k 无关。对全体三角形 e_j 求和，即得(1.3)式。 ▌

对应于Laplace 算子，我们引进 $S(\Omega)$上的双线性泛函

$$a(u,v)=\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x, \quad (1.4)$$

其中 $\nabla u\cdot\nabla v$ 表示向量 ∇u 与 ∇v 的内积。有时为了说明(1.4)的积分区域，我们将上述双线性泛函数记作 $a(u,v)_\Omega$。

考察如下的变分问题：任取 $f\in S(\partial\Omega)$，求 $u\in S(\Omega)$，使 $u|_{\partial\Omega}=f$，并且

$$a(u,v)=0, \quad \forall v\in S_0(\Omega). \tag{1.5}$$

引理1.2 问题(1.5)有唯一解.

证明 作 $u_0\in S(\Omega)$，使 $u_0|_{\partial\Omega}=f$，并且

$$u_0|_{\Gamma_k}=0, \quad k=1,2,\cdots.$$

令 $u'=u-u_0$，则问题(1.5)等价于：求 $u'\in S_0(\Omega)$，使

$$a(u',v)=-a(u_0,v), \quad \forall v\in S_0(\Omega). \tag{1.6}$$

在 $S_0(\Omega)$上有不等式(1.2)，因此

$$a(v,v)\geqslant\frac{1}{5}\|v\|_{1,*}^2, \quad \forall v\in S_0(\Omega).$$

由 Lax－Milgram 定理[32]，(1.6)有唯一解. 因此(1.5)有唯一解. ▌

对于三维外部区域 $\Omega\subset\boldsymbol{R}^3$，我们总可以认为$O\in\Omega$，空间$H^{1,*}(\Omega)$的范数定义为

$$\|u\|_{1,*}=\left(\int_\Omega\left(|\nabla u(x)|^2+\frac{u^2(x)}{|x|^2}\right)\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

按照这个范数，空间 $H^{1,*}(\Omega),H_0^{1,*}(\Omega),S(\Omega),S_0(\Omega)$的定义都与二维情形类似.

引理1.3 设 $u\in S(\Omega)$，$y_k=B_ku$，则存在与 u 无关的常数 C，使

$$\frac{1}{C}\sum_{k=1}^{\infty}\xi^k|y_k-y_{k-1}|^2\leqslant\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\leqslant C\sum_{k=0}^{\infty}\xi^k|y_k|^2.$$

它的证明与引理 1.1 的证明类似，从略.

§2 转移阵矩

在这一节中，我们讨论 Laplace 方程，首先考虑平面问题. 象第一章一样，我们以

$$\begin{pmatrix} K_0 & -A^{\mathrm{T}} \\ -A & K_0' \end{pmatrix}$$

记 Ω_k 上的刚度矩阵。因为双线性泛函 $a(\cdot,\cdot)_{\Omega_k}$ 是对称的，所以它是一个对称矩阵。

引理2.1 K_0, K_0' 是正定矩阵。

证明 任取 $y_0 \neq 0$，并取 $y_1 = 0$，则对应的插值函数 u 不是常数，所以

$$W = \frac{1}{2}\int_{\Omega_1} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x > 0.$$

同时

$$W = \frac{1}{2}(y_0^{\mathrm{T}}, y_1^{\mathrm{T}}) \begin{pmatrix} K_0 & -A^{\mathrm{T}} \\ -A & K_0' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} y_0^{\mathrm{T}} K_0 y_0.$$

于是

$$y_0^{\mathrm{T}} K_0 y_0 > 0, \qquad \forall\, y_0 \neq 0,$$

即 K_0 是正定矩阵。关于 K_0' 的证明是类似的。▍

由引理1.2，任给 $y_0 \in \boldsymbol{R}^n$，问题(1.5)有唯一解 u，使 $B_0 u = y_0$。记 $y_k = B_k u$，则 y_1 由 y_0 唯一确定。容易验证，映射 $y_0 \to y_1$ 是线性的。因此有实矩阵 X，使

$$y_1 = X y_0.$$

令 $w(x) = u(\xi^k x)$，则 $w \in S(\Omega)$，$B_0 w = y_k$。w 满足方程(1.5)，因此

$$y_{k+1} = X y_k.$$

归纳得

$$y_k = X^k y_0, \qquad k = 1, 2, \cdots. \tag{2.1}$$

在本节中，我们要讨论 Laplace 方程的复函数解。这时，前面的讨论可以不变，只要把 $y_0, y_1, \cdots, y_k, \cdots$ 看成是复数域上的向量就可以了。需要注意的是，如前所证，转移矩阵 X 为实的。

引理2.2 如果 λ 为转移矩阵 X 的特征值，且 $|\lambda| \geqslant 1$，则 $\lambda = 1$。

证明 设对应于 λ 的特征向量为 g。令 $y_0 = g$，作为问题(1.5)的边值，得到 $y_1, y_2, \cdots, y_k, \cdots$，则由(2.1)，

$$y_k = X^k g = \lambda^k g.$$

因此

$$\sum_{k=1}^{\infty}|y_k - y_{k-1}|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|\lambda^k - \lambda^{k-1}|^2|g|^2$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}|\lambda|^{2k-2}|\lambda - 1|^2|g|^2.$$

由引理 1.1，右端的级数是收敛的。又 $|g|\neq 0$，所以有 $\lambda=1$。∎

引理2.3 转移矩阵X对应于特征值 $\lambda=1$ 的初等因子是一次的。

证明 若不然，则有非零向量 g,g_0，使

$$(X-I)g_0=0, \qquad (X-I)g=g_0,$$

其中 I 为单位阵，即有

$$Xg=g_0+g.$$

归纳得

$$X^k g=kg_0+g.$$

以 $y_0=g$ 作为问题(1.5)的边值，得到 $y_1,y_2,\cdots,y_k,\cdots$， 则由

$$y_k=kg_0+g$$

得

$$\sum_{k=1}^{\infty}|y_k - y_{k-1}|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|g_0|^2 = +\infty.$$

由引理1.1，与 $u\in H^{1,*}(\Omega)$矛盾。∎

引理2.4 转移矩阵X有一个特征值 $\lambda=1$，对应的特征向量是

$$g_1=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}.$$

证明 以 $y_0=g_1$ 为问题(1.5)的边值，得到常数解 $u\equiv 1$。令 $B_k u=y_k$，则 $y_k=g_1$。由(2.1)

$$Xg_1=g_1. \quad ∎$$

引理2.5 对于任意的复向量 y_0，$X^k y_0\to y_\infty(k\to\infty)$，其中

$$y_\infty=\alpha g_1,$$

α 为常数。

证明 由引理 2.2 与引理 2.3，当 $k\to\infty$时，X^k 的极限存在。以 y_∞ 记 $X^k y_0$ 的极限，写成分量形式是

$$(y_\infty^{(1)}, y_\infty^{(2)}, \cdots, y_\infty^{(n)})^{\mathrm{T}}.$$

我们只要证明 $y_\infty^{(1)} = y_\infty^{(2)} = \cdots = y_\infty^{(n)}$就够了。若不然，不妨假设 $y_\infty^{(i)} \neq y_\infty^{(i+1)}$，它们分别对应了第 i 个节点与第 $i+1$ 个节点。在 Ω_k 中，必有一个单元 e_j 以这两个节点联线为一边，设边长为 L，则有

$$\int_{e_j} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x \geqslant \frac{\mathrm{meas}\, e_j}{L^2} |y_k^{(i)} - y_k^{(i+1)}|^2.$$

由相似性 $\mathrm{meas}\, e_j / L^2$ 与 k 无关。对于 k 求和，得

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x \geqslant \frac{\mathrm{meas}\, e_j}{L^2} \sum_{k=1}^{\infty} |y_k^{(i)} - y_k^{(i+1)}|^2.$$

当 $k \to \infty$ 时，右端级数的通项以 $|y_\infty^{(i)} - y_\infty^{(i+1)}|^2 \neq 0$ 为极限。因此

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x = \infty,$$

导致矛盾。▍

引理2.6 转移矩阵 X 的特征值中只有一个 $\lambda = 1$，其余特征值的绝对值均小于 1 .

证明 若不然，由引理2.2，引理 2.3，引理 2.4，必定还有一个特征向量 g'，对应了特征值 $\lambda = 1$。由引理2.5，

$$X^k g' \to a g_1 (k \to \infty),$$

但是 $X^k g' = g'$，因此 $g' = a g_1$，与 g_1, g' 的线性无关性矛盾。▍

对于三维问题，同样可以证明 K_0 与 K'_0 是对称正定的。还可以证明

引理2.7 转移矩阵 X 的每一个特征值 λ 均满足 $|\lambda| < \xi^{-\frac{1}{2}}$。

证明 设 g 为对应于 λ 的特征向量。以 $y_0 = g$ 为问题(1.5)的边值(三维情形)，得到 $y_1, y_2, \cdots, y_k, \cdots$，则 $y_k = \lambda^k g$。因此

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi^k |y_k - y_{k-1}|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \xi^k |\lambda|^{2k-2} |\lambda - 1|^2 |g|^2.$$

由引理 1.3，以上级数收敛。当 $\lambda\neq 1$ 时，$\xi^k|\lambda|^{2k}<1$，即 $|\lambda|<\xi^{-\frac{1}{2}}$。当 $\lambda=1$ 时，$y_0=y_1=\cdots=y_k=\cdots=g$，这时

$$\int_{E_k}\frac{u^2(x)}{|x|^2}\mathrm{d}x\geqslant C\xi^k,$$

于是$\|u\|_{1,*}=\infty$，不合要求。因此 $\lambda=1$ 不是特征值。 ▌

§3 无限元空间与转移矩阵的进一步讨论

首先讨论二维问题。设 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_i,\cdots\in S_0(\Omega)$，$\varphi_i$ 在 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\Gamma_k$ 的某一节点上等于 1，在其余节点上都等于零，它们可以称为"型函数"。我们记 φ_i 的有限线性组合

$$\varphi=c_1\varphi_1+c_2\varphi_2+\cdots+c_i\varphi_i$$

构成的集合为 $\tilde{S}_0(\Omega)$，则 $\tilde{S}_0(\Omega)\subset S_0(\Omega)$。$\tilde{S}_0(\Omega)$中每一个函数都有有界的支集。

定理3.1 $\tilde{S}_0(\Omega)$在 $S_0(\Omega)$中稠密。

证明 任取 $u\in S_0(\Omega)$。因为 $S_0(\Omega)\subset H_0^{1,*}(\Omega)$，所以对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $u_1\in C_0^\infty(\Omega)$，使$\|u-u_1\|_{1,*}<\varepsilon$。考虑如下问题：求 $u_2\in S_0(\Omega)$，使

$$a(u_2,v)=a(u_1,v),\qquad \forall v\in S_0(\Omega),\tag{3.1}$$

其中$a(\cdot,\cdot)$由(1.4)确定。类似于引理1.2，可以证明问题(3.1)有唯一解。由二次泛函的正定性得

$$\frac{1}{2}a(u_2,u_2)-a(u_1,u_2)=\min_{v\in S_0(\Omega)}\left\{\frac{1}{2}a(v,v)-a(u_1,v)\right\}.$$

因此

$$\frac{1}{2}a(u_2,u_2)-a(u_1,u_2)\leqslant\frac{1}{2}a(u,u)-a(u_1,u).$$

以$\frac{1}{2}a(u_1,u_1)$加于上面的不等式两边得

$$a(u_2-u_1,u_2-u_1)\leqslant a(u-u_1,u-u_1).$$

于是

$$a(u_2-u_1,u_2-u_1)<\varepsilon.$$

由不等式(1.2)

$$\|u_2-u_1\|_{1,*}<5\varepsilon.$$

但是 $u_1\in C_0^\infty(\Omega)$，所以存在自然数 k_0，使在区域 $\xi^{k_0}\Omega$ 上 $u_1\equiv 0$。由(1.4)，(3.1)，u_2 满足

$$a(u_2,v)=0,\qquad \forall v\in S_0(\xi^{k_0}\Omega),$$

其中对于 $S_0(\xi^{k_0}\Omega)$ 中的函数，我们约定它在 $\Omega\backslash\xi^{k_0}\Omega$ 上延拓为零. 由引理2.5，当 $|x|\to\infty$ 时，u_2 趋于一个常数 α，因此 u_2 是一个有界函数。

对于 $k=1,2,\cdots$，我们作截断函数 $u_{2,k}\in S_0(\Omega)$，使它满足

$$u_{2,k}=\begin{cases} u_2, & x\in\Omega\backslash\xi^k\Omega,\\ 0, & x\in\xi^{k+1}\Omega.\end{cases}$$

令 $y_k=B_k u_2$，则由引理 1.1

$$\int_\Omega|\nabla u_{2,k}|^2\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega|\nabla u_2|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{C}|y_k|^2.$$

因此 $\{u_{2,k}\}$ 在 $S_0(\Omega)$ 中有界。任取 $v\in S_0(\Omega)$，由 Schwarz 不等式得

$$\begin{aligned}&\left|\int_\Omega\nabla v\cdot\nabla(u_2-u_{2,k})\mathrm{d}x\right|\\ &=\left|\int_{\Omega_{k+1}}\nabla v\cdot\nabla(u_2-u_{2,k})\mathrm{d}x+\int_{\xi^{k+1}\Omega}\nabla v\cdot\nabla u_2\mathrm{d}x\right|\\ &\leqslant\left(\int_{\Omega_{k+1}}|\nabla v|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_{\Omega_{k+1}}|\nabla(u_2-u_{2,k})|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\\ &\quad+\left|\int_{\xi^{k+1}\Omega}\nabla v\cdot\nabla u_2\mathrm{d}x\right|.\end{aligned}$$

因为 $u_2,u_{2,k}$ 都是有界函数，所以 $\int_{\Omega_{k+1}}|\nabla(u_2-u_{2,k})|^2\mathrm{d}x$ 关于 k 一

致有界。又因为 $v, u_2 \in S_0(\Omega)$，所以当 $k \to \infty$ 时，

$$\int_{\Omega_{k+1}} |\nabla v|^2 \mathrm{d}x \to 0, \qquad \left| \int_{\xi^{k+1}\Omega} \nabla v \cdot \nabla u_2 \mathrm{d}x \right| \to 0.$$

因此当 $k \to \infty$ 时，

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla (u_2 - u_{2,k}) \mathrm{d}x \to 0,$$

即 $u_{2,k}$ 弱收敛于 u_2。由 Mazur 定理[48]，存在线性组合

$$u_3 = c_1 u_{2,1} + c_2 u_{2,2} + \cdots + c_i u_{2,i},$$

使 $\|u_3 - u_2\|_{1,*} < \varepsilon$。于是 $\|u - u_3\|_{1,*} < 7\varepsilon$。但是 $u_3 \in \tilde{S}_0(\Omega)$，由此立即得到稠密性。▎

下面继续讨论 Laplace 方程。我们给出无限元方法的另一种提法：求 $u \in S(\Omega)$，使 $u|_{\partial\Omega} = f$，并且

$$a(u, \varphi_i) = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots. \tag{3.2}$$

定理3.2 提法(3.2)与(1.5)是等价的。

证明 我们只要证明由(3.2)可以导出(1.5)就够了。设 u 为(3.2)的解，则 u 满足

$$a(u, v) = 0, \qquad \forall v \in \tilde{S}_0(\Omega).$$

由定理 3.1 即得(1.5)。▎

将(3.2)用矩阵形式表示，我们就得到了在第一章 § 1中的方程组

$$K_0 y_0 - A^{\mathrm{T}} y_1 = f_0, \tag{3.3$_0$}$$

$$-A y_0 + K y_1 - A^{\mathrm{T}} y_2 = 0, \tag{3.3$_1$}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-A y_{k-1} + K y_k - A^{\mathrm{T}} y_{k+1} = 0, \tag{3.3$_k$}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

以及转移矩阵X满足的方程

$$A^{\mathrm{T}} X^2 - K X + A = 0. \tag{3.4}$$

需要注意的是，方程(3.4)的解是不唯一的。

定理3.3 确定转移矩阵X的充分必要条件是

(a) X满足方程(3.4)；

(b) X有一个特征值$\lambda=1$，初等因子为一次，特征向量为g_1；

(c) X的其余特征值的绝对值均小于1.

证明 由引理2.2至引理2.6，以及(3.4)，必要性是明显的。现在证明其充分性。设矩阵X满足(a),(b),(c)。任取$g\in \mathbf{R}^n$，令

$$y_k=X^k g,\qquad k=0,1,\cdots,$$

则它们满足$(3.3)_1,(3.3)_2,\cdots$。作插值函数u。由定理3.2，我们只要证明$u\in S(\Omega)$，u就是问题(1.5)的解，从而X即为所求。

由(b),(c)，当$k\to\infty$时，$X^k y_0$的极限存在，设它是y_∞，因为

$$Xy_\infty=X\lim_{k\to\infty}X^k y_0=\lim_{k\to\infty}X^{k+1}y_0=y_\infty,$$

所以$y_\infty=\alpha g_1$。令$y'_k=y_k-y_\infty$，则y'_k的插值函数就是$u'=u-\alpha$。我们只要证明$u'\in S(\Omega)$。

将X用Jordan标准形表示为

$$X=TJT^{-1},\tag{3.5}$$

其中

$$J=\begin{pmatrix}1 & \\ & J_1\end{pmatrix}.$$

J_1由绝对值小于1的特征值的Jordan块组成。由y_k的定义，

$$Xy'_{k-1}=X(y_{k-1}-y_\infty)=y_k-y_\infty=y'_k.\tag{3.6}$$

令

$$z_k=T^{-1}y'_k,$$

则由(3.5),(3.6),

$$z_k=Jz_{k-1},\qquad k=1,2,\cdots.$$

归纳得

$$z_k=J^k z_0,$$

即

$$z_k = \begin{pmatrix} 1 & \\ & J_1^k \end{pmatrix} z_0. \tag{3.7}$$

因为当$k\to\infty$时，$y'_k\to 0$，所以$z_k\to 0$。由(3.7)式，z_0的第一个分量必为零，否则z_k的极限不等于零。于是

$$z_k = \begin{pmatrix} 0 & \\ & J_1^k \end{pmatrix} z_0.$$

以$\|\cdot\|$记矩阵的谱范数。设$\rho_1=\rho(J_1)$是矩阵J_1的谱半径，p是J_1中谱半径等于ρ_1的子块的最大阶，则有[39]

$$\|J_1^k\| \leqslant c(p) C_k^{p-1} \rho_1{}^{k-p+1}, \tag{3.8}$$

其中$k\geqslant p-1$，$c(p)$为仅依赖于p的常数，C_k^{p-1}为组合数。我们有

$$\sum_{k=p-1}^{\infty} |z_k|^2 \leqslant \sum_{k=p-1}^{\infty} \|J_1^k\|^2 |z_0|^2 \leqslant \sum_{k=p-1}^{\infty} c^2(p)\{C_k^{p-1}\rho_1^{k-p+1}\}^2 |z_0|^2.$$

已知$\rho_1<1$，所以右端的级数收敛。因此

$$\sum_{k=0}^{\infty} |y'_k|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |Tz_k|^2 \leqslant \|T\|^2 \sum_{k=0}^{\infty} |z_k|^2$$

也是收敛的。由引理1.1

$$\int_\Omega |\nabla u'|^2 \mathrm{d}x < +\infty.$$

此外容易看出

$$\int_\Omega \frac{(u'(x))^2}{|x|^2 \log^2 |x|} \mathrm{d}x < +\infty. \quad \blacksquare$$

对于Laplace方程的角点问题，如果局部边界条件是$\frac{\partial u}{\partial \nu}=0$，则§1至§3的结论都仍适用。这时的基本空间为$H^1(\Omega)$以及$H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$，其中

$$H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \{u\in H^1(\Omega);\quad u|_{\Gamma_0}=0\}.$$

而无限元空间为

$$S(\Omega)=\{u\in H^1(\Omega);\quad u|_{e_i}\in P_1(e_i),\ i=1,2,\cdots\},$$

$$S_0(\Omega)=\{u\in S(\Omega);\ u|_{\Gamma_0}=0\}.$$

若考虑其它边界条件，则结论会有所不同。我们将在下节讨论平面弹性力学方程组的各种边值问题。因为讨论的方法类似，对于 Laplace 方程我们就不仔细介绍了。这里有一点是值得注意的，即定理 3.1 以及角点问题的相应的定理完全不涉及所讨论的方程，因此它们是普遍适用的。

对于三维 Laplace 方程外问题，我们有

定理3.4 确定转移矩阵X的充分必要条件是

(a) X满足方程

$$\xi A^{\mathrm T}X^2-\xi^{\frac12}KX+A=0;$$

(b) X的特征值的绝对值均小于$\xi^{-\frac12}$。

§4 平面弹性问题的转移矩阵

对于平面弹性问题，记位移向量为$u=(u_1,u_2)$或$v=(v_1,v_2)$。令

$$a(u,v)=\int_\Omega\left\{\left((\lambda+2\mu)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\lambda\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\left((\lambda+2\mu)\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\lambda\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right.$$

$$\left.+\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)\right\}\mathrm dx. \tag{4.1}$$

有时，为了说明积分(4.1)的区域，我们将以上双线性泛函记为$a(u,v)_\Omega$。按照问题的不同，无限元空间$S(\Omega)$与$S_0(\Omega)$的定义也不同，我们举两个例子。

(a) 外问题：

$$S(\Omega)=\{u\in(H^{1,*}(\Omega))^2;\ u|_{e_i}\in(P_1(e_i))^2,\ i=1,2,\cdots\},$$

$$S_0(\Omega)=\{u\in S(\Omega);\ u|_{\partial\Omega}=0\},$$
$$S(\partial\Omega)=\{u|_{\partial\Omega};\ u\in S(\Omega)\}.$$

(b) 角点问题：

例如在角点 O 的一侧 Γ^* 给固定边界条件，另一侧 Γ_* 给自由边界条件(图21)，则

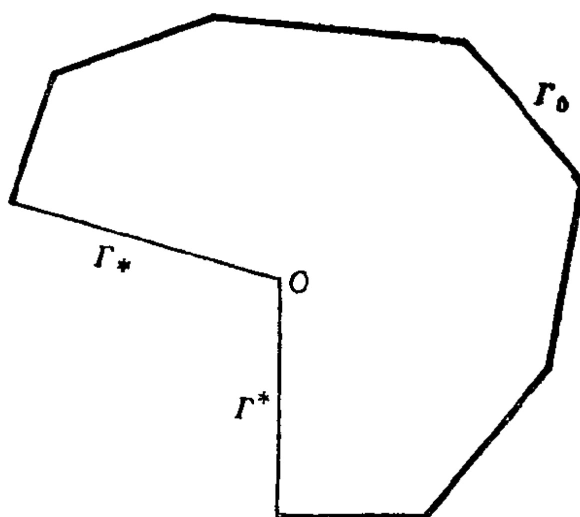


图 21

$$S(\Omega)=\{u\in(H^1(\Omega))^2;\ u|_{e_i}\in(P_1(e_i))^2,$$
$$i=1,2\cdots,\ u|_{\Gamma^*}=0\},$$
$$S_0(\Omega)=\{u\in S(\Omega);\ u|_{\Gamma_0}=0\},$$
$$S(\Gamma_0)=\{u|_{\Gamma_0};\ u\in S(\Omega)\}.$$

无限元问题的提法为：任取 $f\in S(\Gamma_0)$ 求 $u\in S(\Omega)$，使 $u|_{\Gamma_0}=f$，并且

$$a(u,v)=0,\qquad \forall v\in S_0(\Omega).\tag{4.2}$$

与§2，§3中的各命题平行，我们有下面的引理与定理。有些命题的证明与前面是一样的，此处从略。

引理4.1 K_0, K_0' 是正定矩阵。

证明 取 $y_0\neq 0$，$y_1=0$，则对应的插值函数不是刚体运动。

因此

$$W=\frac{1}{2}a(u,u)>0.$$

由此即可得 K_0 是正定矩阵. 关于 K_0' 的证明是一样的. ▌

引理4.2 如果 λ 为转移矩阵 X 的特征值, 且$|\lambda|\geqslant 1$, 则 $\lambda=1$.

引理4.3 转移矩阵X对应于特征值 $\lambda=1$ 的初等因子是一次的.

引理4.4 按照局部边界条件, 若允许平移是 $u\equiv c$, 其中 c 是任意常向量, 则转移矩阵X 有两个特征值 $\lambda=1$, 对应的特征向量是

$$g_1=(1,0,1,0,\cdots,1,0)^{\mathrm{T}} \quad 与 \quad g_2=(0,1,0,1,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}};$$

若允许平移是 $u_1=c\cos\theta$, $u_2=c\sin\theta$, 其中 c 为任意常数, θ 为固定常数, 则在 g_1,g_2 的线性组合中, 只有 $c(g_1\cos\theta+g_2\sin\theta)$是对应于特征值 $\lambda=1$ 的特征向量; 若允许平移是 $u\equiv 0$, 则在 g_1, g_2 的线性组合中, 没有对应于 $\lambda=1$ 的特征向量.

证明 g_1,g_2 的任一线性组合都对应了平移. 但是平移必须满足边界条件. 所以只有上述 g_1,g_2 的线性组合是对应于特征值 $\lambda=1$的特征向量. ▌

引理4.5 对于任意的复向量 y_0, $X^k y_0\to y_\infty(k\to\infty)$, 其中

$$y_\infty=\alpha g_1+\beta g_2,$$

α,β 为常数.

引理4.6 转移矩阵 X的特征值 λ 若等于 1, 则它对应的特征向量是 g_1,g_2 的线性组合.

定理4.1 确定转移矩阵 X的充分必要条件是

(a) X 满足方程

$$A^{\mathrm{T}}X^2-KX+A=0;$$

(b) 若允许平移是 $u\equiv c$, c 为任意常向量, 则 X 有两个特征值 $\lambda=1$, 初等因子是一次的, g_1,g_2 是特征向量; 若允许平移

是 $u_1=c\cos\theta$，$u_2=c\sin\theta$，其中 c 为任意常数，θ 为固定常数，则 X 有一个特征值 $\lambda=1$，$g_1\cos\theta+g_2\sin\theta$ 是特征向量；若允许平移是$u\equiv0$，则 X没有等于 1 的特征值；

(c) X 的其余特征值的绝对值均小于 1。

§5 组合刚度矩阵

在本节中，我们统一地处理本章 §1—§4中讨论过的各种边值问题。转移矩阵X 总可以表成

$$X=T\begin{pmatrix} I & \\ & J_1 \end{pmatrix}T^{-1},$$

其中 I 为零阶或一阶或二阶单位阵，它对应了常数解；J_1 由绝对值小于 1 的特征值的 Jordan 块组成。

引理5.1 对应于特征值 $\lambda=1$ 的转移矩阵 X 的特征向量必是组合刚度矩阵 K_z 的零特征向量。

证明 设g 是这样一个特征向量，因为它对应了常数解，所以在 Ω_1 上

$$W_1=\frac{1}{2}(g^{\mathrm{T}},g^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix} K_0 & -A^{\mathrm{T}} \\ -A & K_0' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g \\ g \end{pmatrix}=0.$$

$\begin{pmatrix} K_0 & -A^{\mathrm{T}} \\ -A & K_0' \end{pmatrix}$是对称半正定矩阵，因此$\begin{pmatrix} g \\ g \end{pmatrix}$是它的零特征向量，即

$$\begin{pmatrix} K_0 & -A^{\mathrm{T}} \\ -A & K_0' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g \\ g \end{pmatrix}=0. \tag{5.1}$$

从第一行得到

$$(K_0-A^{\mathrm{T}})g=0.$$

以 $g=Xg$ 代入得

$$K_zg=(K_0-A^{\mathrm{T}}X)g=0. \quad \blacksquare$$

引理5.2 若 $u\in S(\Omega)$，$y_0=B_0u$，u 满足方程

$$a(u,v)=0,\qquad \forall\, v\in S_0(\Omega),$$

同时 $w\in S(\Omega)$，$z_0=B_0w$，则

$$a(u,w)=z_0^{\mathrm{T}}K_zy_0.$$

证明 分解 $w=w_1+w_2$，$w_1\in S(\Omega)$，$w_1|_{\Gamma_k}=0$，$k=1,2,\cdots$，$w_2\in S_0(\Omega)$，则

$$a(u,w_2)=0.$$

于是

$$a(u,w)=a(u,w_1)=(z_0^{\mathrm{T}},0)\begin{pmatrix}K_0 & -A^{\mathrm{T}}\\ -A & K_0'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_0\\ Xy_0\end{pmatrix}$$

$$=z_0^{\mathrm{T}}K_zy_0.\ \blacksquare$$

定理5.1 K_z 是对称半正定矩阵.

证明 在引理5.2中，取 w 也满足

$$a(w,v)=0,\qquad \forall\, v\in S_0(\Omega).$$

则由 $a(\cdot,\cdot)$的对称性，

$$z_0^{\mathrm{T}}K_zy_0=a(u,w)=a(w,u)=y_0^{\mathrm{T}}K_zz_0.$$

由 y_0,z_0 的任意性，K_z 是对称的. 又 $a(\cdot,\cdot)$是半正定的，所以

$$y_0^{\mathrm{T}}K_zy_0=a(u,u)\geqslant 0.$$

由 y_0 的任意性，K_z 是一个半正定矩阵. $\blacksquare$

§6 通解的结构

在第一章中，我们曾给出转移矩阵的表达式(1.13)，其中假定了所有初等因子都是一次的. 在本节我们给出在一般情形下转移矩阵的表达式. 我们的方法是从通解的结构入手. 这个方法对于前面各节中的各种边值问题都是适用的. 为确定起见，以Laplace方程的外问题为例.

设有多边形Γ_0，原点O被包含于它的内部. Γ_0 关于 O点是

星形的。取$\xi>1$，作无限的相似剖分如第一章 §1。设相应的转移矩阵为X。我们还可以以$\xi^{-1},\xi^{-2},\cdots,\xi^{-k},\cdots$为相似参数，作无限密集于$O$点的相似剖分，设相应的转移矩阵为$\bar{X}$。

以Ω表示Γ_0的外部，任取自然数$N\geqslant 2$，考虑区域$\overline{\Omega\setminus\xi^N\Omega}$。设$y_0\in \boldsymbol{C}^n$与$y_N\in \boldsymbol{C}^N$为已知，则在此区域上的有限元问题有唯一解，它满足方程

$$-Ay_{k-1}+Ky_k-A^{\mathrm{T}}y_{k+1}=0,\qquad k=1,2,\cdots,N-1,\tag{6.1}$$

或写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix}K & -A\\ I & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_k\\ y_{k-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^{\mathrm{T}} & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_{k+1}\\ y_k\end{pmatrix}.$$

设y_0与y_N为任意，则解空间是$2n$维的。

由矩阵论[33]，存在满秩矩阵T_1与T_2，使

$$\begin{pmatrix}K & -A\\ I & 0\end{pmatrix}=T_1\Lambda_1T_2,\quad \begin{pmatrix}A^{\mathrm{T}} & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}=T_1\Lambda_2T_2,\tag{6.2}$$

其中Λ_1,Λ_2是同样分块的块对角矩阵。Λ_1可以写成

$$\Lambda_1=\mathrm{diag}(J_1,J_2,J_3),$$

其中J_1,J_2,J_3分别由对应于特征值$|\lambda|<1$，$|\lambda|=1$与$1<|\lambda|\leqslant\infty$的Jordan块组成。对于$|\lambda|<\infty$，$\Lambda_1$中的子矩阵就是通常意义下的Jordan块，$\Lambda_2$中的对应子矩阵是单位矩阵。对于$\lambda=\infty$，$\Lambda_1$中的子矩阵是单位矩阵，而$\Lambda_2$中的对应子矩阵是Jordan幂零矩阵

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & 0\end{pmatrix}.$$

我们在下面判明矩阵Λ_1的结构。

引理6.1 方程组

$$(K-A-A^{\mathrm{T}})x=0\tag{6.3}$$

的通解为$x=\alpha g_1$，其中$g_1=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha$为任意常数。

证明 由(5.1)式

$$\begin{pmatrix} K_0 & -A^{\mathrm{T}} \\ -A & K_0' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_1 \\ g_1 \end{pmatrix} = 0.$$

两行相加得

$$(K - A - A^{\mathrm{T}})g_1 = 0,$$

因此g_1是解。另一方面，设x是(6.3)的解，则易验证

$$(x^{\mathrm{T}}, x^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix} K_0 & -A^{\mathrm{T}} \\ -A & K_0' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = 0.$$

令$y_0 = y_1 = x$，作插值函数u，则$a(u,u)_{\Omega_1} = 0$。我们得 $u \equiv \alpha$，即 $x = \alpha g_1$。 ▎

引理6.2 方程组

$$(K - A - A^{\mathrm{T}})x = (A^{\mathrm{T}} - A)g_1 \tag{6.4}$$

有解.

证明 因为

$$g_1^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}} - A)g_1 = 0,$$

所以由引理6.1，方程(6.4)有解. ▎

我们记

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - X),$$

$$f(\lambda) = \det\begin{pmatrix} K - \lambda A^{\mathrm{T}} & -A \\ I & -\lambda I \end{pmatrix},$$

则有

引理6.3 $f(\lambda) = \lambda^n \varphi(\lambda)\varphi(1/\lambda)\det(A^{\mathrm{T}}X - K)$。

证明 由行列式的性质以及方程(3.4)，

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} K - \lambda A^{\mathrm{T}} & \lambda(K - \lambda A^{\mathrm{T}}) - A \\ I & 0 \end{pmatrix} \\ &= \det(\lambda^2 A^{\mathrm{T}} - \lambda K + A) \\ &= \det((\lambda^2 A^{\mathrm{T}} - \lambda K) - (A^{\mathrm{T}}X^2 - KX)) \\ &= \det(A^{\mathrm{T}}(\lambda^2 I - X^2) - K(\lambda I - X)) \\ &= \det((\lambda A^{\mathrm{T}} + A^{\mathrm{T}}X - K)(\lambda I - X)) \\ &= \varphi(\lambda)\det(\lambda A^{\mathrm{T}} + A^{\mathrm{T}}X - K). \end{aligned}$$

由定理5.1，$A^{T}X$是一个对称矩阵，将矩阵作转置得

$$f(\lambda)=\varphi(\lambda)\det(\lambda A+A^{T}X-K).$$

当$\lambda\neq 0$时，由方程(3.4)，

$$\begin{aligned} f(\lambda)&=\varphi(\lambda)\det(\lambda(KX-A^{T}X^{2})+A^{T}X-K)\\ &=\varphi(\lambda)\det((A^{T}X-K)(I-\lambda X))\\ &=\lambda^{n}\varphi(\lambda)\varphi(1/\lambda)\det(A^{T}X-K). \end{aligned}$$

上式两端均为λ的多项式，因此在$\lambda=0$时也成立。▌

由引理6.3以及定理3.3，J_1, J_3都是$n-1$阶矩阵．所以J_2是二阶矩阵．下面我们进一步判明J_2的结构。

引理6.4 $J_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

证明 由引理6.1，

$$\begin{pmatrix}K-A^{T} & -A\\ I & -I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g_1\\ g_1\end{pmatrix}=0,$$

因此$\lambda=1$是特征值。由引理6.2，

$$\begin{pmatrix}K-A^{T} & -A\\ I & -I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ x-g_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^{T} & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g_1\\ g_1\end{pmatrix},$$

其中x为方程(6.4)的解。因此对应于$\lambda=1$的初等因子是二次的。▌

从Jordan标准形(6.2)可以得到方程组(6.1)的通解。以$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{2n}$记$C^{2n}$中的坐标向量，则我们有

定理6.1 方程组(6.1)的通解为如下各解的线性组合：

(a) 对于$i=1,\cdots,n+1$,

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_0\end{pmatrix}=T_2^{-1}\varepsilon_i, \begin{pmatrix}y_2\\ y_1\end{pmatrix}=T_2^{-1}\Lambda_1\varepsilon_i, \cdots, \begin{pmatrix}y_N\\ y_{N-1}\end{pmatrix}=T_2^{-1}\Lambda_1^{N-1}\varepsilon_i; \tag{6.5}$$

(b) 对于$i=n+2,\cdots,2n$,

$$\begin{pmatrix}y_N\\ y_{N-1}\end{pmatrix}=T_2^{-1}\varepsilon_i, \begin{pmatrix}y_{N-1}\\ y_{N-2}\end{pmatrix}=T_2^{-1}\Lambda_2\varepsilon_i, \cdots, \begin{pmatrix}y_1\\ y_0\end{pmatrix}=T_2^{-1}\Lambda_2^{N-1}\varepsilon_i, \tag{6.6}$$

证明　设$i \leqslant n+1$。令

$$\begin{pmatrix} y_k \\ y_{k-1} \end{pmatrix} = T_2^{-1} \Lambda_1^{k-1} \varepsilon_i, \quad \begin{pmatrix} y_{k+1} \\ y_k^* \end{pmatrix} = T_2^{-1} \Lambda_1^k \varepsilon_i. \qquad (6.7)$$

由（6.2），

$$\begin{pmatrix} K & -A \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_k \\ y_{k-1} \end{pmatrix} = T_1 \Lambda_1^k \varepsilon_i,$$

$$\begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{k+1} \\ y_k^* \end{pmatrix} = T_1 \Lambda_2 \Lambda_1^k \varepsilon_i.$$

因为Λ_2对应于ε_i的子矩阵是单位阵，所以

$$\Lambda_2 \Lambda_1^k \varepsilon_i = \Lambda_1^k \varepsilon_i.$$

因此

$$\begin{pmatrix} K & -A \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_k \\ y_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{k+1} \\ y_k^* \end{pmatrix}.$$

由此得$y_k = y_k^*$，并且(6.5)确实给了方程组(6.1)的一组解。当$i \geqslant n+2$时，证明是类似的。

T_2^{-1}的各列是线性无关的，因此(a)给出了$n+1$个线性无关的解，向量$\begin{pmatrix} y_{k+1} \\ y_k \end{pmatrix}$均是$T_2^{-1}$前面$n+1$列的线性组合。同理，(b)给出了$n-1$个线性性无关的解，向量$\begin{pmatrix} y_{k+1} \\ y_k \end{pmatrix}$均是$T_2^{-1}$的后面$n-1$列的线性组合。我们证明(a)中的解与(b)中的解是线性无关的。设(a)中的解的线性组合作成集合E_a，与(b)对应的是集合E_b，则它们分别是$n+1$维和$n-1$维的。设有非零元素$(y_0, y_1, \cdots, y_N) \in E_a$，$(y_0^*, y_1^*, \cdots, y_N^*) \in E_b$，使

$$c_1 y_k + c_2 y_k^* = 0, \quad k = 0, \cdots, N.$$

取$k=0,1$得

$$c_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} y_1^* \\ y_0^* \end{pmatrix} = 0.$$

但是$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_0 \end{pmatrix}$是$T_2^{-1}$前面$n+1$列的线性组合，而且不等于零，$\begin{pmatrix} y_1^* \\ y_0^* \end{pmatrix}$是

T_2^{-1}后面$n-1$列的线性组合，因此只能有$c_1=0$。由 $c_2 y_k^*=0$ 得 $c_2=0$。所以E_a中的非零元素与E_b中的非零元素是线性无关的。总之，我们已经找到了方程组(6.1)的$2n$个线性无关的解。 ▎

由引理2.4,引理2.5，任取$y_0\in \boldsymbol{C}^n$,可以作分解 $y_0=y_0'+ag_1$，使$X^k y_0'\to 0(k\to\infty)$。$y_0'$的集合构成$\boldsymbol{C}^n$的$n-1$ 维子空间，我们把它记作E。同理，由矩阵$\tilde{X}$得到$\boldsymbol{C}^n$的$n-1$维子空间$\tilde{E}$。

定理6.2 在定理6.1所列出的各解中，当$i=1,\cdots,n-1$时，$y_k=X^k y_0, y_0\in E$；当$i=n+2,\cdots,2n$时，$y_k=\tilde{X}^{N-k}y_N, y_N\in\tilde{E}$；当$i=n,n+1$时，两个特解是

$$y_k=g_1(k=0,\cdots,N),\quad y_k=x+kg_1(k=0,\cdots,N),$$

x是方程组(6.4)的解。

证明 先考虑$i=1,\cdots,n-1$的情形。按照(6.5)式的方式可以继续定义 $y_k(k\geqslant N)$。注意到相应的特征值 λ 均满足 $|\lambda|<1$。由定理 3.3 的证明，我们确实得到了无限元解 $y_1,y_2,\cdots,y_k,\cdots$。因此$y_k=X^k y_0$。因为$X^k y_0\to 0(k\to\infty)$，所以$y_0\in E$。

对于$i=n+2,\cdots,2n$的情形，证明是类似的。对于 $i=n,n+1$ 的情形，由引理6.4，结论是明显的。 ▎

推论 设$y_0\in E$，并且$y_k=X^k y_0$，则y_k是(6.5)中各解当 $i=1,\cdots,n-1$时的线性组合。

证明 只要注意到二者的维数都是$n-1$即可。 ▎

在作了以上准备以后，我们可以写出转移矩阵X的表达式。将矩阵T_2^{-1}分块为

$$T_2^{-1}=\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12}\\ T_{21} & T_{22}\end{pmatrix},$$

其中T_{11}与T_{21}是$n\times(n-1)$矩阵，T_{12}与T_{22}是$n\times(n+1)$矩阵。作n阶矩阵

$$V=(T_{11},g_1),\quad U=(T_{21},g_1).$$

任取$y_0\in\boldsymbol{C}^n$,作分解

$$y_0=y_0'+ag_1,\quad y_0'\in E, \tag{6.8}$$

则由定理6.2的推论，存在$z\in \boldsymbol{C}^{2n}$，它的后面$n+1$个分量等于零，使

$$\begin{pmatrix} Xy_0' \\ y_0' \end{pmatrix} = T_2^{-1}z = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 \\ T_{21} & 0 \end{pmatrix} z.$$

取z的前面$n-1$个分量作成向量w，则

$$Xy_0' = T_{11}w, \quad y_0' = T_{21}w.$$

由(6.8)，

$$Xy_0 = T_{11}w + aXg_1 = T_{11}w + ag_1,$$

$$y_0 = T_{21}w + ag_1.$$

令

$$\tilde{w} = \begin{pmatrix} w \\ a \end{pmatrix},$$

则有

$$Xy_0 = V\tilde{w}, \quad y_0 = U\tilde{w}.$$

但是y_0是任意的，所以U是满秩矩阵，于是

$$Xy_0 = VU^{-1}y_0.$$

由y_0的任意性，我们得到转移矩阵X的表达式

$$X = VU^{-1}.$$

从研究通解入手来得到组合刚度矩阵的方法是 Thatcher创立的。在他的工作中，对于刚度矩阵块A是对角阵的情形得到了通解，其工作量是解一个n阶矩阵的特征值问题，当然，现在我们知道对于这种情形用Fourier方法要简便得多。在这一节中，我们用转移矩阵作为工具，得到了一般情形下的通解，当然也是他的工作的一个发展。

§7 分块循环的刚度矩阵

以后，我们以$S(\Omega')$记某一区域Ω'上的有限元空间，即

$$S(\Omega') = \{u\in H^1(\Omega');\ u|_{e_i} \in P_1(e_i), e_i\subset\Omega'\}.$$

在本节中，我们采用极坐标(r,θ). 如第一章§2，设Γ_0上的节点为$(r,0),\left(r,\frac{2\pi}{n}\right),\cdots,\left(r,\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)$. 设$u,v\in S(\Omega_1)$,

$$B_0u=y_0,\quad B_1u=y_1,\quad B_0v=z_0,\quad B_1v=z_1.$$

则

$$a(u,v)_{\Omega_1}=(z_0^{\mathrm{T}},z_1^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix}K_0 & -A^{\mathrm{T}}\\ -A & K_0'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_0\\ y_1\end{pmatrix}.$$

作矩阵

$$B=\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0\\ 1 & & & 1\end{pmatrix},$$

并且令

$$\tilde{y}_0=By_0,\quad \tilde{y}_1=By_1,\quad \tilde{z}_0=Bz_0,\quad \tilde{z}_1=Bz_1.$$

将坐标轴按正方向旋转$\frac{2\pi}{n}$弧度，则如图4的剖分在此变换下不变，方程$\Delta u=0$在此变换下也不变，因此刚度矩阵保持不变。我们有

$$a(u,v)_{\Omega_1}=(\tilde{z}_0^{\mathrm{T}},\tilde{z}_1^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix}K_0 & -A^{\mathrm{T}}\\ -A & K_0'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{y}_0\\ \tilde{y}_1\end{pmatrix}.$$

取$z_1=y_1=0$得

$$z_0^{\mathrm{T}}K_0y_0=\tilde{z}_0^{\mathrm{T}}K_0\tilde{y}_0, \tag{7.1}$$

设

$$K_0=\begin{pmatrix}k_{11} & \cdots & k_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ k_{n1} & \cdots & k_{nn}\end{pmatrix}, \tag{7.2}$$

并且为了方便起见，记$k_{i0}=k_{in},k_{0j}=k_{nj}$. 设$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$为$\boldsymbol{C}^n$的坐标向量。取$y_0=\varepsilon_j,z_0=\varepsilon_i$,则由(7.1),(7.2)可得

$$k_{ij}=k_{i-1,j-1},\quad 1\leqslant i,j\leqslant n.$$

因此K_0是循环矩阵。同理可证A,K_0'也是循环矩阵。

现在我们转向第一章§9的平面弹性问题.这时同样有(7.1),

(7.2)，其中k_{ij}是二阶子矩阵，矩阵B是

$$B=\begin{pmatrix} 0 & I & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I \\ I & & & 0 \end{pmatrix},$$

I是二阶单位阵。我们记

$$y_0=\begin{pmatrix} y_0^{(1)} \\ y_0^{(2)} \\ \vdots \\ y_0^{(n)} \end{pmatrix}, \quad z_0=\begin{pmatrix} z_0^{(1)} \\ z_0^{(2)} \\ \vdots \\ z_0^{(n)} \end{pmatrix},$$

其中$y_0^{(1)},y_0^{(2)},\cdots,y_0^{(n)}$；$z_0^{(1)},z_0^{(2)},\cdots,z_0^{(n)}$都是二维列向量。我们取$y_0^{(j)},z_0^{(i)}$为任意，其余分量等于零，则由(7.1)，(7.2)得

$$z_0^{(i)\mathrm{T}}k_{ij}y_0^{(j)}=z_0^{(i)\mathrm{T}}k_{i-1,\ j-1}y_0^{(j)}.$$

由$y_0^{(j)},z_0^{(i)}$的任意性得$k_{ij}=k_{i-1,\ j-1}$.因此K_0是块循环矩阵.同理可证A,K_0'也是块循环矩阵。

下面我们再讨论第一章§9中转移矩阵$X^{(i)}(i=1,2,\cdots,n)$的特征值与特征向量。取

$$y_k=g_1=(1,0,1,0,\cdots,1,0)^{\mathrm{T}}, \qquad k=0,1,\cdots,$$

则

$$z_k=\bar{F}y_k=(\sqrt{n},0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}.$$

由矩阵$X^{(1)}$的性质，

$$X^{(1)}\begin{pmatrix}\sqrt{n}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{n}\\0\end{pmatrix},$$

因此矩阵$X^{(1)}$有一个特征值1，对应了特征向量$(\sqrt{n},0)^{\mathrm{T}}$.同理，利用向量$g_2=(0,1,0,1,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}}$可以得到矩阵$X^{(1)}$的另一特征值1与特征向量$(0,\sqrt{n})^{\mathrm{T}}$.所以$X^{(1)}=I$。

转移矩阵X与Z是相似的，它们有相同的特征值，由定理4.1，X只有两个特征值$\lambda=1$，其余特征值均满足$|\lambda|<1$。我们现在已经找到了两个特征值$\lambda=1$，因此$X^{(i)}(i=2,\cdots,n)$的特征值λ均满足$|\lambda|<1$。

§8 第一类迭代法

我们统一地讨论在本章§1—§4中处理过的各种边值问题。转移矩阵X的Jordan标准形为

$$X=T\begin{pmatrix} I & \\ & J_1 \end{pmatrix}T^{-1},$$

其中I为零阶或一阶或二阶单位阵，J_1由绝对值小于1的特征值的Jordan块组成。以$Q(\Omega)$（或$Q(\Omega_k)$）记$S(\Omega)$（或$S(\Omega_k)$）的子空间，$u\in Q(\Omega)$（或$u\in Q(\Omega_k)$）的充分必要条件是

$$B_0u=B_1u=\cdots=B_ku=\cdots,$$

并且B_0u是矩阵X对应于特征值$\lambda=1$的特征向量。

任取自然数k，作$S(\Omega)$的子空间

$$D_k(\Omega)=\{u\in S(\Omega);\, u|_{\xi^k\Omega}\in Q(\xi^k\Omega)\}.$$

取定$f\in S(\Gamma_0)$，设$u\in S(\Omega),u|_{\Gamma_0}=f$，满足方程

$$a(u,v)=0,\quad \forall v\in S_0(\Omega). \tag{8.1}$$

同时，作$\bar u_k\in D_k(\Omega),\bar u_k|_{\Gamma_0}=f$,满足

$$a(\bar u_k,\bar u_k)=\min_{\substack{v|_{\Gamma_0}=f\\ v\in D_k(\Omega)}} a(v,v). \tag{8.2}$$

问题（8.2）有唯一解。设$B_0\bar u_k=y_0$，则存在对称半正定矩阵$\overline{K}_z^{(k)}$，使

$$a(\bar u_k,\bar u_k)=y_0^T\overline{K}_z^{(k)}y_0.$$

取$k=2^l$，即得第一章中的迭代格式(3.3)—(3.5)，(3.7)等。

定理8.1 对于二维问题，当$k=p,p+1,\cdots$时，有

(a) $K_z\leqslant\overline{K}_z^{(k+1)}\leqslant\overline{K}_z^{(k)}$;

(b) $\|\overline{K}_z^{(k)}-K_z\|\leqslant(c(p)(\kappa(T))^2C_{k-1}^{p-1}\rho_1^{k-p})^2\|K_0-K_z\|$，

其中$\kappa(T)=\|T\|\|T^{-1}\|$是矩阵$T$的条件数，其余符号与(3.8)相同。

证明 因为$D_k(\Omega)\subset D_{k+1}(\Omega)\subset S(\Omega)$，所以（a）成立。

以下证明（b）。作分解$y_0=y_0^{(1)}+y_0^{(2)}$，其中$y_0^{(1)}$属于转移矩阵X对应于$|\lambda|<1$的不变子空间，$y_0^{(2)}$属于X对应于$\lambda=1$的不变子空间。令

$$y_k^{(1)}=X^k y_0^{(1)},\quad y_k^{(2)}=X^k y_0^{(2)},$$

相应的插值函数为$u^{(1)}$与$u^{(2)}$，则$u=u^{(1)}+u^{(2)}$，并且$u^{(2)}\in Q(\Omega)$。所以

$$a(u,u)=a(u^{(1)},u^{(1)})。$$

设$v\in S(\Omega)$满足

$$v=\begin{cases}u^{(1)}, & x\in\Omega\backslash\xi^{k-1}\Omega,\\ 0\ , & x\in\xi^k\Omega,\end{cases}$$

则$v+u^{(2)}\in D_k(\Omega)$，并且$B_0(v+u^{(2)})=y_0$。因此

$$a(\bar{u}_k,\bar{u}_k)\leqslant a(v+u^{(2)},v+u^{(2)})=a(v,v)。$$

于是

$$\begin{aligned}0&\leqslant y_0^{\mathrm{T}}(\bar{K}_z^{(k)}-K_z)y_0=a(\bar{u}_k,\bar{u}_k)-a(u,u)\\&\leqslant a(v,v)-a(u^{(1)},u^{(1)})\\&=a(v,v)_{\Omega_k}-a(u^{(1)},u^{(1)})_{\xi^{k-1}\Omega}。\end{aligned}$$

利用一层的刚度矩阵得

$$\begin{aligned}a(v,v)_{\Omega_k}&=\begin{pmatrix}y_{k-1}^{(1)}\\0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}K_0 & -A^{\mathrm{T}}\\ -A & K_0'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_{k-1}^{(1)}\\0\end{pmatrix}\\&=(y_{k-1}^{(1)})^{\mathrm{T}}K_0y_{k-1}^{(1)}。\end{aligned}$$

又有

$$a(u^{(1)},u^{(1)})_{\xi^{k-1}\Omega}=(y_{k-1}^{(1)})^{\mathrm{T}}K_zy_{k-1}^{(1)},$$

所以

$$0\leqslant y_0^{\mathrm{T}}(\bar{K}_z^{(k)}-K_z)y_0\leqslant(y_{k-1}^{(1)})^{\mathrm{T}}(K_0-K_z)y_{k-1}^{(1)}。\quad(8.3)$$

不难证明

$$|y_0^{(1)}|\leqslant\kappa(T)\,|y_0|。$$

由（3.8）式，

$$|y_{k-1}^{(1)}|=\left|T\begin{pmatrix}I & \\ & J_1^{k-1}\end{pmatrix}T^{-1}y_0^{(1)}\right|$$

$$\leqslant c(p)(\kappa(T))^2 C_{k-1}^{p-1}\rho_1^{k-p}|y_0|.$$

代入(8.3)得

$$0\leqslant y_0^{\mathrm{T}}(\overline{K}_z^{(k)}-K_z)y_0$$
$$\leqslant(c(p)(\kappa(T))^2C_{k-1}^{p-1}\rho_1^{k-p})^2\|K_0-K_z\|\cdot|y_0|^2.$$

由已经证明了的结论(a)，$\overline{K}_z^{(k)}-K_z$是对称半正定矩阵，所以

$$\|\overline{K}_z^{(k)}-K_z\|\leqslant\sup_{|y_0|=1}y_0^{\mathrm{T}}(\overline{K}_z^{(k)}-K_z)y_0$$
$$\leqslant(c(p)(\kappa(T))^2C_{k-1}^{p-1}\rho_1^{k-p})^2\|K_0-K_z\|.\quad \blacksquare$$

定理8.2 对于三维问题，当$k=p,p+1,\cdots$时，有

(a) $K_z\leqslant\overline{K}_z^{(k+1)}\leqslant\overline{K}_z^{(k)}$；

(b) $\|\overline{K}_z^{(k)}-K_z\|\leqslant(c(p)(\kappa(T))^2C_{k-1}^{p-1}\rho_1{}^{k-p})^2\xi^{k-1}$
$$\times\|K_0-K_z\|.$$

证明 我们注意到，由第一章§5，

$$a(v,v)_{\Omega_k}=\xi^{k-1}\begin{pmatrix}y_{k-1}^{(1)}\\0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}K_0&-A^{\mathrm{T}}\\-A&K_0'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_{k-1}^{(1)}\\0\end{pmatrix},$$
$$a(u^{(1)},u^{(1)})_{\xi^{k-1}\Omega}=\xi^{k-1}(y_{k-1}^{(1)})^{\mathrm{T}}K_zy_{k-1}^{(1)}.$$

象定理8.1一样可以证明结论．$\blacksquare$

附注

(a) 对于二维问题，收敛速率为$O(\rho_1^{2^{l+1}})$，其中$0<|\rho_1|<1$，所以迭代法具有很高的速率。

(b) 对于三维问题，收敛速率为$O((\sqrt{\xi}\rho_1)^{2^{l+1}})$，由引理2.7，$0<|\sqrt{\xi}\rho_1|<1$，也具有很高的收敛速率。

(c) 如果我们能找到空间$D_k^*(\Omega)$，使$D_k(\Omega)\subset D_k^*(\Omega)\subset S(\Omega)$，则可以作解$u_k^*\in D_k^*(\Omega),u_k^*|_{\Gamma_0}=f$，满足

$$a(u_k^*,u_k^*)=\min_{\substack{v|_{\Gamma_0}=f\\v\in D_k^*(\Omega)}}a(v,v).$$

得到近似的刚度矩阵K_z^*，它满足$K_z\leqslant K_z^*\leqslant\overline{K}_z^{(k)}$，比$\overline{K}_z^{(k)}$更接近

于K_z。这就是我们在第一章§7，§9中采用的改进格式的依据。

§9 第二类迭代法

在本节中，我们统一地讨论Laplace方程的各种边值问题以及平面弹性力学方程组在第一章§9表2中显示"+"号的各种边值问题。

给定对称半正定矩阵$K_z^{(0)}$，取$k\geqslant 1$，作$S(\Omega)$中的二次泛函

$$a_k(u,u)=a(u,u)_{\Omega\setminus\overline{\xi^k\Omega}}+y_k^{\mathrm{T}}K_z^{(0)}y_k,$$

其中$y_k=B_k u$。任意给定$f\in S(\Gamma_0)$，设u_k为如下问题的解，在区域$\Omega\setminus\overline{\xi^k\Omega}$上它是唯一的。

$$a_k(u_k,u_k)=\min_{\substack{v\in S(\Omega)\\ v|_{\Gamma_0}=f}} a_k(v,v)。\tag{9.1}$$

存在对称半正定矩阵$K_z^{(k)}$，满足

$$a_k(u_k,u_k)=y_0^{\mathrm{T}}K_z^{(k)}y_0,$$

其中$y_0=B_0u_k$。

为了证明当$k\to\infty$时，$K_z^{(k)}\to K_z$，我们考虑一个辅助问题。求$\tilde{u}_k\in S(\Omega\setminus\overline{\xi^k\Omega})$，使$\tilde{u}_k|_{\Gamma_0}=f$，并且满足

$$a(\tilde{u}_k,\tilde{u}_k)_{\Omega\setminus\overline{\xi^k\Omega}}=\min_{\substack{v\in S(\Omega\setminus\overline{\xi^k\Omega})\\ v|_{\Gamma_0}=f}} a(v,v)_{\Omega\setminus\overline{\xi^k\Omega}}。\tag{9.2}$$

存在对称半正定矩阵$\tilde{K}_z^{(k)}$，满足

$$a(\tilde{u}_k,\tilde{u}_k)_{\Omega\setminus\overline{\xi^k\Omega}}=y_0^{\mathrm{T}}\tilde{K}_z^{(k)}y_0,$$

其中$y_0=B_0\tilde{u}_k$。

引理9.1 设u，$\tilde{u}_k$分别是(8.1)与(9.2)的解，则有

$$\lim_{k\to\infty} a(\tilde{u}_k,\tilde{u}_k)_{\Omega\setminus\overline{\xi^k\Omega}}=a(u,u)_{\Omega},\tag{9.3}$$

即

$$\lim_{k\to\infty} \widetilde{K}_z^{(k)} = K_z.$$

同时还有

$$\widetilde{K}_z^{(k)} \leqslant \widetilde{K}_z^{(k+1)} \leqslant K_z. \tag{9.4}$$

证明 显然

$$\begin{aligned} a(\tilde{u}_k, \tilde{u}_k)_{\Omega\setminus\overline{\xi^k\Omega}} &\leqslant a(\tilde{u}_{k+1}, \tilde{u}_{k+1})_{\Omega\setminus\overline{\xi^k\Omega}} \\ &\leqslant a(\tilde{u}_{k+1}, \tilde{u}_{k+1})_{\Omega\setminus\overline{\xi^{k+1}\Omega}} \\ &\leqslant a(u,u)_{\Omega\setminus\overline{\xi^{k+1}\Omega}} \leqslant a(u,u)_\Omega, \end{aligned} \tag{9.5}$$

因此(9.4)成立。现在固定自然数 l，当 $k \geqslant l$ 时，

$$a(\tilde{u}_k, \tilde{u}_k)_{\Omega\setminus\overline{\xi^l\Omega}} \leqslant a(\tilde{u}_k, \tilde{u}_k)_{\Omega\setminus\overline{\xi^k\Omega}}. \tag{9.6}$$

由(9.5),(9.6)得

$$a(\tilde{u}_k, \tilde{u}_k)_{\Omega\setminus\overline{\xi^l\Omega}} \leqslant a(u,u)_\Omega.$$

即上式左端关于 k 一致有界。同时 $\tilde{u}_k|_{\Gamma_0} = f$ 是已知的，由 Friedrichs 不等式或 Korn 不等式即可得 $\|\tilde{u}_k\|_{1,\Omega\setminus\overline{\xi^l\Omega}}$ 关于 k 一致有界。

$S(\Omega\setminus\overline{\xi^l\Omega})$ 是有限维空间，各种范数都是等价的。取 $\{\tilde{u}_k\}$ 的按 H^1 范数收敛的子序列，然后关于 l 取对角线子序列，设极限为 $\tilde{u}$。于是，对于每个自然数 l，都有 $\tilde{u} \in S(\Omega\setminus\overline{\xi^l\Omega})$，$\tilde{u}|_{\Gamma_0} = f$，并且

$$a(\tilde{u}, \tilde{u})_{\Omega\setminus\overline{\xi^l\Omega}} \leqslant a(u,u)_\Omega.$$

令 $l \to \infty$ 得

$$a(\tilde{u}, \tilde{u})_\Omega \leqslant a(u,u)_\Omega. \tag{9.7}$$

若 Ω 是有界区域，则由 Friedrichs 不等式或 Korn 不等式得 $\tilde{u} \in H^1(\Omega)$。若 Ω 是无界区域，关于 Laplace 方程，由不等式 (1.1),(1.2)，$\tilde{u} \in H^{1,*}(\Omega)$，即 $\tilde{u} \in S(\Omega)$。对于平面弹性力学方程组，设边界条件是 $u=0$，则在 Ω_k 上，由 Korn 不等式，

$$\int_{\Omega_k} |\nabla \tilde{u}|^2 \mathrm{d}x \leqslant C a(\tilde{u}, \tilde{u})_{\Omega_k}.$$

由相似性，常数 C 与 k 无关。关于 k 叠加得

$$\int_\Omega |\nabla \tilde{u}|^2 \mathrm{d}x \leqslant C a(\tilde{u}, \tilde{u})_\Omega.$$

利用 Friedrichs 不等式，也有 $\tilde{u} \in H^{1,*}(\Omega)$。因为 u 是极小值点，所以由(9.7)得

$$a(\tilde{u}, \tilde{u})_\Omega = a(u, u)_\Omega.$$

由解的唯一性，$\tilde{u} = u$。

由极限函数的唯一性，整个序列$\{\tilde{u}_k\}$都收敛到 u，即

$$\lim_{k\to\infty} a(\tilde{u}_k, \tilde{u}_k)_{\Omega\setminus\overline{\xi^l\Omega}} = a(u, u)_{\Omega\setminus\overline{\xi^l\Omega}}.$$

由(9.5)，(9.6)得(9.3)。 |

定理9.1 如果转移矩阵X的对应于特征值 $\lambda = 1$ 的特征向量是 $K_z^{(0)}$ 的零特征向量，则

$$\lim_{k\to\infty} K_z^{(k)} = K_z. \tag{9.8}$$

证明 任取 $f \in S(\Gamma_0)$。设 $\bar{u}_k, u_k, \tilde{u}_k$ 分别是(8.2)，(9.1)，(9.2)的解，$\bar{K}_z^{(k)}, K_z^{(k)}, \tilde{K}_z^{(k)}$ 是对应的组合刚度矩阵，则由定理8.1，定理8.2和引理9.1得

$$\tilde{K}_z^{(k)} \leqslant K_z \leqslant \bar{K}_z^{(k)},$$

并且

$$\lim_{k\to\infty} \bar{K}_z^{(k)} = \lim_{k\to\infty} \tilde{K}_z^{(k)} = K_z. \tag{9.9}$$

令 $y_k = B_k u_k$，则

$$a_k(u_k, u_k) = a(u_k, u_k)_{\Omega\setminus\overline{\xi^k\Omega}} + y_k^{\mathrm{T}} K_z^{(0)} y_k.$$

由 $K_z^{(0)}$的半正定性，

$$a_k(u_k, u_k) \geqslant a(u_k, u_k)_{\Omega\setminus\overline{\xi^k\Omega}} \geqslant a(\tilde{u}_k, \tilde{u}_k)_{\Omega\setminus\overline{\xi^k\Omega}}.$$

又由定理的假设，

$$K_z^{(0)} B_k \bar{u}_k = 0.$$

因此

$$a_k(u_k, u_k) \leqslant a_k(\bar{u}_k, \bar{u}_k) = a(\bar{u}_k, \bar{u}_k)_{\Omega\setminus\overline{\xi^k\Omega}}.$$

综合以上各不等式有

$$a(\tilde{u}_k, \tilde{u}_k)_{\Omega\setminus\overline{\xi^k\Omega}} \leqslant a_k(u_k, u_k) \leqslant a(\bar{u}_k, \bar{u}_k)_\Omega,$$

即

$$\tilde{K}_z^{(k)} \leqslant K_z^{(k)} \leqslant \bar{K}_z^{(k)}.$$

由(9.9)即得(9.8)。∎

利用定理9.1，我们考察组合刚度矩阵 K_z 满足的方程。在二维情形，如第一章(3.10)，K_z 满足

$$K_z = K_l - A_l^T(K_z + K'_l)^{-1}A_l, \tag{9.10}$$

其中 l 是任一自然数。在三维情形，由第一章§5，K_z 满足

$$K_z = K_l - A_l^T(\xi^{2^l}K_z + K'_l)^{-1}A_l. \tag{9.11}$$

如果 $K_z^{(0)}$ 是 n 阶实对称半正定矩阵，并且转移矩阵 X 的对应于特征值 $\lambda=1$ 的特征向量是 $K_z^{(0)}$ 的零特征向量，则记 $K_z^{(0)}\in M$。我们有如下的定理：

定理9.2 在集合 M 中，方程(9.10)或(9.11)有唯一解。

证明 在第一章中，我们已经证明了矩阵 K_z 满足方程(9.10)或(9.11)。由引理5.1和定理5.1，$K_z\in M$。现在证明唯一性。

设 $K_z^{(0)}\in M$ 是(9.10)的解。在方程(9.1)中，取 $k=2^l$，得到 $K_z^{(k)}\in M$。$K_z^{(k)}$ 满足迭代式

$$K_z^{(k)} = K_l - A_l^T(K_z^{(0)} + K'_l)^{-1}A_l.$$

再以 $K_z^{(k)}$ 作为 $K_z^{(0)}$，代入(9.1)得 $K_z^{(2k)}$，如此继续下去，得到序列 $\{K_z^{(mk)}\}_{m=0}^{\infty}$。但 $K_z^{(0)}$ 是(9.10)的解，所以

$$K_z^{(0)} = K_z^{(k)} = \cdots = K_z^{(mk)} = \cdots.$$

由定理9.1，$K_z^{(0)} = K_z$。对于方程(9.11)证明是相同的。∎

定理9.2说明了第二类迭代法的极限与迭代过程中的舍入误差无关。

§10 一般椭圆型方程组

以上各节的结果可以推广到一般的 $2m$ 阶椭圆型方程组，设对应的双线性泛函是

$$a(u,v)=\sum_{i,j=1}^{N}\sum_{|\alpha|,|\beta|=m}\int_{\Omega}a_{ij\alpha\beta}\partial^{\alpha}u_i\partial^{\beta}v_j\mathrm{d}x, \quad (10.1)$$

其中 $x\in \boldsymbol{R}^d$,Ω 为 $\boldsymbol{R}^d$ 中开集,

$$u=(u_1,\cdots,u_N), \quad v=(v_1,\cdots,v_N), \quad u,v\in(H^m(\Omega))^N,$$

$\partial^\alpha,\partial^\beta$ 表示求偏微商运算,α,β 是多重指标,$a_{ij\alpha\beta}$ 是常数。如有必要指出集合 Ω,我们记以上双线性泛函为 $a(u,v)_\Omega$。

设 Ω 是角点 O 的一个邻域,如图22,它对于 O 点是星形的,即区域内每一点与 O 点的联线都整个地位于 Ω 内。取 $0<\xi<1$,如第一章§7定义曲面 $\Gamma_0,\Gamma_1,\cdots,\Gamma_k,\cdots$,$\Gamma_k$ 与 O 点之间的区域记作 $\xi^k\Omega$,令

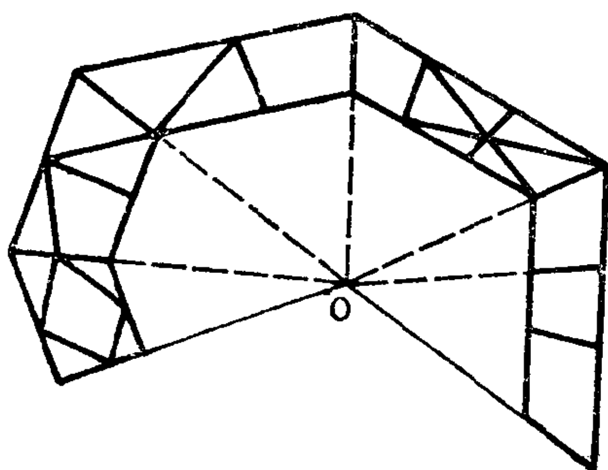


图 22

$$\Omega_k=\xi^{k-1}\Omega\backslash\overline{\xi^k\Omega}.$$

将各层 Ω_k 内的剖分看作是一个"子结构",我们要求各层内的剖分皆几何相似。

以 $S(\Omega_k)$ 记与以上剖分对应的 $(H^m(\Omega_k))^N$ 的有限维子空间。设 $u\in S(\Omega_k)$,则它在 Γ_{k-1} 与 Γ_k 上的零次迹到 $m-1$ 次迹都是有意义的[50],以 γ_{k-1} 或 γ_k 记迹算子,以 $S(\Gamma_{k-1})$ 或 $S(\Gamma_k)$ 记迹空间,并且令

$$S_0(\Omega_k)=\{u\in S(\Omega_k);\gamma_{k-1}u=\gamma_k u=0\}.$$

设 $f_{k-1}\in S(\Gamma_{k-1}),f_k\in S(\Gamma_k)$。我们考虑如下的边值问题:求 $u\in S(\Omega_k)$,使

$$\begin{cases} a(u,v)_{\Omega_k}=0, & \forall v\in S_0(\Omega_k), \\ \gamma_{k-1}u=f_{k-1}, & \gamma_k u=f_k. \end{cases} \quad (10.2)$$

我们假定(10.2)有唯一解。当 f_{k-1} 与 f_k 为任意时,我们得到

问题(10.2)的一个解空间，它是$S(\Omega_k)$的一个子空间，记作Y_k。

由剖分的相似性，在$S(\Gamma_0), S(\Gamma_1), \cdots, S(\Gamma_k), \cdots$之间有一个自然的同构，任取

$$f = (f^{(0)}, f^{(1)}, \cdots, f^{(m-1)}) \in S(\Gamma_k),$$

其中$f^{(0)}, f^{(1)}, \cdots, f^{(m-1)}$分别表示0次迹以至$m-1$次迹。作自变量的变换$x \to \xi^{-k} x$，按新的自变量，

$$(f^{(0)}, \xi^k f^{(1)}, \cdots, \xi^{(m-1)k} f^{(m-1)}) \in S(\Gamma_0).$$

我们将这个同构记作Z_k：$S(\Gamma_k) \to S(\Gamma_0)$.又$S(\Gamma_0)$是有限维的，设维数为$n$，则任一$f \in S(\Gamma_0)$都对应一个$n$维列向量$y$.按此关系，$S(\Gamma_k)$中的每一个元素也都对应了一个$n$维列向量$y$。设$u \in S(\Omega_k)$，则

$$S(\Omega_k) \to S(\Gamma_{k-1}) \to S(\Gamma_0) \to \boldsymbol{R}^n$$

的对应关系记作$y = B_{k-1} u$。同理也有$B_k u$。

定义无限元空间为

$$S(\Omega) = \{u \in (H^m(\Omega))^N;\ u|_{\Omega_k} \in S(\Omega_k)\},$$

$$S_0(\Omega) = \{u \in S(\Omega);\ B_0 u = 0\}.$$

以后我们永远假定$(P_{m-1}(\Omega))^N \subset S(\Omega)$.考虑如下的无限元问题：已知$y_0 \in \boldsymbol{R}^n$，求$u \in S(\Omega)$，使$B_0 u = y_0$，并且

$$a(u, v) = 0, \quad \forall v \in S_0(\Omega). \tag{10.3}$$

为了建立平行于§1到§3中的理论，我们先讨论如下的典型问题：考虑方程

$$\Delta^m u = 0,$$

与它对应的双线性泛函是

$$a(u, v) = \sum_{|\alpha| = m} \int_\Omega a_\alpha\, \partial^\alpha u \partial^\alpha v \mathrm{d}x,$$

其中a_α是d项式$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}\right)^m$的系数。我们有Friedrichs型的不等式

$$a(u,u)\geqslant C^{-1}\|u\|^2_{m,\Omega},\quad \forall u\in S_0(\Omega),\qquad(10.4)$$

其中 $C>0$。因此对应的问题(10.3)有唯一解。任取 $y_0,y_1\in \boldsymbol{R}^n$，在问题(10.2)中取 $k=1$，边界条件为 $B_0u=y_0,B_1u=y_1$，设解为 u，则 $u\in Y_1$。Y_1 是一个 $2n$ 维子空间，它的元素与 (y_0,y_1) 一一对应。我们可以有表达式

$$a(u,u)_{\Omega_1}=(y_0^{\mathrm T},y_1^{\mathrm T})\begin{pmatrix}K_0 & -A^{\mathrm T}\\ -A & K_0'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_0\\ y_1\end{pmatrix}.$$

设 u 为问题(10.3)的解，则有实矩阵 X，使

$$y_k=Xy_{k-1},\quad k=1,2,\cdots.$$

令 Q_l 是次数为 l 的复系数齐次多项式的集合。

引理10.1 转移矩阵 X 有特征值 $\lambda=1,\xi,\cdots,\xi^{m-1}$，对应的特征空间为 $B_0Q_0,B_0Q_1,\cdots,B_0Q_{m-1}$。其它特征值 λ 均满足 $|\lambda|<\xi^{m-\frac{d}{2}}$。对于满足 $|\lambda|\geqslant\xi^{m-\frac{d}{2}}$ 的特征值，对应的初等因子是一次的。

证明 设 λ 为特征值，g 为对应的特征向量，以 $B_0u=g$ 为边界条件，得(10.3)的解 u。在区域 Ω_k 上，作自变量的变换 $x\to\xi^{-k+1}x$，$u|_{\Omega_k}$ 对应了一个定义在 Ω_1 上的函数 $u^{(k)}\in Y_1$，因为 $y_{k-1}=\lambda^{k-1}y_0$，$y_k=\lambda^{k-1}y_1$，所以 $u^{(k)}=\lambda^{k-1}u^{(1)}$，

$$\begin{aligned}|u|^2_m&=\sum_{k=1}^{\infty}|u|^2_{m,\Omega_k}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda|^{2(k-1)}\xi^{(d-2m)(k-1)}|u^{(1)}|^2_{m,\Omega_1}.\qquad(10.5)\end{aligned}$$

因为 $u\in(H^m(\Omega))^N$，所以以上级数收敛。因此，或者 $|u^{(1)}|^2_{m,\Omega_1}=0$，或者 $|\lambda|^2\xi^{d-2m}<1$。对于前者，$u^{(1)}\in(P_{m-1}(\Omega_1))^N$。容易看出，这时 u 是齐次多项式。对于后者，$|\lambda|<\xi^{m-\frac{d}{2}}$。

当 $|\lambda|\geqslant\xi^{m-\frac{d}{2}}$ 时，根据本引理已经证明的结论，$\lambda\in\{1,\xi,\cdots,\xi^{m-1}\}$。我们证明初等因子是一次的。如果这个结论不对，则存在 $g_1\in\boldsymbol{R}^n$，使

$$Xg_1 = g + \lambda g_1.$$

归纳得

$$X^k g_1 = k\lambda^{k-1}g + \lambda^k g_1, \quad k = 1,2,\cdots.$$

取 $B_0 u = g_1$ 为边界条件，则有

$$y_k = k\lambda^{k-1}g + \lambda^k y_0,$$

因此

$$y_{k+1} - \lambda y_k = \lambda^k g. \tag{10.6}$$

象前一段一样地作 $u^{(k)}$，则由（10.6）可以证明

$$u^{(k)} - \lambda^{k-1}u^{(1)} \in (P_{m-1}(\Omega_1))^N,$$

因此(10.5)式同样成立．这时$|u^{(1)}|^2_{m,\Omega_1} \neq 0$，又$|\lambda| \geq \xi^{m-\frac{d}{2}}$，级数(10.5)发散．由此导致矛盾．▌

定义 $S(\Omega)$的两个子空间：

$$T_k(\Omega) = \{u \in S(\Omega);\ u|_{\Omega_j} = 0,\ j \neq k, j \neq k+1\}, k = 1,2,\cdots,$$

当$m - \dfrac{d}{2} \leq 0$时，令$W(\Omega) = \{0\}$；当 $m - \dfrac{d}{2} > 0$时，取q是小于$m - \dfrac{d}{2}$的最大整数，令

$$W(\Omega) = \{u \in S(\Omega);\ B_0 u = 0, u|_{\xi\Omega} \in (P_q(\xi\Omega))^N\}.$$

下面我们证明一个稠密性定理．令

$$U_i(\Omega) = W(\Omega) \oplus T_1(\Omega) \oplus \cdots \oplus T_i(\Omega),$$

$$\tilde{S}_0(\Omega) = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i(\Omega).$$

定理10.1 $\tilde{S}_0(\Omega)$在 $S_0(\Omega)$中稠密．

证明 记 $\Omega^* = \Omega \backslash \bar{\Gamma}_0 \backslash \{0\}$．任取 $u \in S_0(\Omega)$，则对于任意的$\varepsilon > 0$，存在 $w \in W(\Omega)$和 $u_1 \in C_0^\infty(\Omega^*)$，使$\|u - u_1 - w\|_m < \varepsilon$[50]．考虑如下问题：求 $u_2 \in S_0(\Omega)$，使

$$a(u_2, v) = a(u_1, v), \quad \forall v \in S_0(\Omega). \tag{10.7}$$

由(10.4)式，(10.7)有唯一解．类似于定理3.1的证明，可得

$$\|u_2 - u_1\|_m < C\varepsilon.$$

存在自然数k_0，使当$k\geqslant k_0$时，$u_1\equiv 0$。我们将u_2作分解$u_2=u_3+u_4$，其中u_3对应于转移矩阵X的特征值$\lambda=1,\xi,\cdots,\xi^{m-1}$，$u_4$对应于所有满足$|\lambda|<\xi^{m-\frac{d}{2}}$的特征值，这时$u_3\in(P_{m-1})^N$，因此$|u_3|_m=0$。作截断函数$u_{4,k}\in S(\Omega),k\geqslant k_0$，使

$$u_{4,k}|_{\Omega_{k+1}}\in Y_{k+1},$$

并且

$$u_{4,k}=\begin{cases}u_4, & x\in\Omega\backslash\xi^k\Omega,\\ 0, & x\in\xi^{k+1}\Omega.\end{cases}$$

作自变量的变换$x\to\xi^{-k}x$，则$u_{4,k}|_{\Omega_{k+1}}$对应了一个定义于Ω_1上的函数，记作$u^{(k)}$。这时

$$|u_{4,k}|_{m,\Omega_{k+1}}=\xi^{(\frac{d}{2}-m)k}|u^{(k)}|_{m,\Omega_1}.$$

但是$|B_ku_4|<C\xi^{(m-\frac{d}{2})k}$，因此

$$|u^{(k)}|_{m,\Omega_1}<C\xi^{(m-\frac{d}{2})k}.$$

于是$|u_{4,k}|_{m,\Omega_{k+1}}$关于$k$一致有界。

利用与定理3.1完全相同的证明即可求出

$$u_5\in T_1(\Omega)\oplus\cdots\oplus T_i(\Omega),$$

使

$$|u_1-u_5|_m<C\varepsilon.$$

但是$u_1-u_5\in(H_0^m(\Omega))^N$，由 Friedrichs 型的不等式即得

$$\|u_1-u_5\|_m<C\varepsilon,$$

即有

$$\|u-u_5-w\|_m<C\varepsilon. \quad \blacksquare$$

现在我们回到一般的双线性泛函(10.1)。由定理10.1，问题(10.3)等价于：求$u\in S(\Omega)$，使$B_0u=y_0$，并且

$$a(u,v)=0,\quad\forall v\in W(\Omega),\ \forall v\in T_k(\Omega),k=1,2,\cdots. \tag{10.8}$$

我们假定问题(10.3)或(10.8)有唯一解，则存在实矩阵X，使

$$y_k=Xy_{k-1},\quad k=1,2,\cdots.$$

并且对于这种一般的情形，引理10.1也成立。令

$$V(\Omega)=\{u\in S(\Omega);\ u|_{\Omega_k}\in Y_k,k=1,2,\cdots\},$$

$$V_0(\Omega)=\{u\in V(\Omega);\ B_0u=0\},$$

$$Y_k(\Omega)=T_k(\Omega)\cap V(\Omega),\quad W_0(\Omega)=W(\Omega)\cap V(\Omega).$$

下面是问题(10.3)的另一个等价的提法。

引理10.2 问题 (10.3) 等价于：求 $u\in V(\Omega)$，使 $B_0u=y_0$，并且

$$a(u,v)=0,\quad \forall v\in W_0(\Omega),\ \forall v\in Y_k(\Omega),\ k=1,2,\cdots. \tag{10.9}$$

证明 若 u 是问题(10.3)的解，则 $u|_{\Omega_k}\in Y_k$，因此 $u\in V(\Omega)$。又 $W_0(\Omega)$，$Y_k(\Omega)$都是 $S_0(\Omega)$ 的子空间，所以 u 是(10.9)的解。

反之，若 u 是(10.9)的解，我们证明它也是(10.8)的解。任取 $v\in T_k(\Omega)$。在 Ω_k 上作分解 $v|_{\Omega_k}=v_1+v_2$，使 $v_1\in Y_k$，$v_2\in S_0(\Omega_k)$。在 Ω_{k+1} 上也作同样分解。由(10.9)得

$$a(u,v_1)_{\Omega_k}+a(u,v_1)_{\Omega_{k+1}}=0.$$

又因为 $u|_{\Omega_k}\in Y_k$，所以

$$a(u,v_2)_{\Omega_k}=0,\quad a(u,v_2)_{\Omega_{k+1}}=0.$$

叠加即得 $a(u,v)_\Omega=0$。同样，任取 $v\in W(\Omega)$，在 Ω_1 上作分解 $v|_{\Omega_1}=v_1+v_2$，使 $v_1\in Y_1$，$v_2\in S_0(\Omega_1)$。由(10.9)得

$$a(u,v)_{\complement\Omega}+a(u,v_1)_{\Omega_1}=0.$$

又因为 $u|_{\Omega_1}\in Y_1$，所以

$$a(u,v_2)_{\Omega_1}=0.$$

叠加也得 $a(u,v)_\Omega=0$。▌

任取 $u,v\in Y_k$，令

$$y_{k-1}=B_{k-1}u,\quad y_k=B_ku,\quad z_{k-1}=B_{k-1}v,\quad z_k=B_kv,$$

则 $a(u,v)_{\Omega_k}$ 可以通过 y_{k-1},y_k,z_{k-1},z_k 表示。设

$$a(u,v)_{\Omega_k}=(z_{k-1}^{\mathrm T},z_k^{\mathrm T})\begin{pmatrix}K_0 & -B\\ -A & K_0'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_{k-1}\\ y_k\end{pmatrix}.$$

则由方程组(10.9)以及 v 的任意性得

$$g^{T}(-Ay_0+K'_0y_1)=0,$$

$$-Ay_0+(K'_0+\xi^{d-2m}K_0)y_1-\xi^{d-2m}By_2=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-Ay_{k-1}+(K'_0+\xi^{d-2m}K_0)y_k-\xi^{d-2m}By_{k+1}=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

其中 $g\in B_1W(\Omega)$。我们得到转移矩阵X满足的方程

$$g^{T}(-A+K'_0X)=0,\quad \forall g\in B_1W(\Omega),\tag{10.10}$$

$$\xi^{d-2m}BX^2-(K'_0+\xi^{d-2m}K_0)X+A=0.\tag{10.11}$$

类似于定理3.3，我们有

定理10.2 确定转移矩阵 X 的充分必要条件是:

(a) 如果 λ 是一个特征值，则或者 $\lambda=\xi^{l}$，l 为非负整数，$l\leqslant m-\dfrac{d}{2}$，对应的特征空间为 B_0Q_l，对应的初等因子是一次的，或者 $|\lambda|<\xi^{m-\frac{d}{2}}$;

(b) X 满足方程(10.10);

(c) X 满足方程(10.11)。

证明 由引理10.1，引理10.2，必要性是明显的，我们证明其充分性。

设X满足(a)，(b)，(c)。任取 $y_0\in\boldsymbol{R}^n$，令 $y_k=X^ky_0$。在每个区域 Ω_k 内解问题(10.2)，由引理 10.2，我们只要证明所得到的解 $u\in(H^m(\Omega))^N$。

作分解 $y_0=y_0^{(1)}+y_0^{(2)}$，其中 $y_0^{(1)}$ 属于转移矩阵 X 对应于 $\lambda=\xi^{l}$ 的不变子空间，$y_0^{(2)}$ 属于转移矩阵X对应于$|\lambda|<\xi^{m-\frac{d}{2}}$ 的不变子空间，由此导出一个分解 $u=u^{(1)}+u^{(2)}$，利用问题(10.2)的解的唯一性

$$u^{(1)}\in(P_{m-1}(\Omega))^N\subset(H^m(\Omega))^N,$$

我们只要证明 $u^{(2)}\in(H^m(\Omega))^N$。

作自变量的变换 $x\to\xi^{-k+1}x$，则 $\Omega_k\to\Omega_1$。设在此变换下 $u|_{\Omega_k}\to u^{(k)}\in S(\Omega_1)$，则有

$$|u|^2_{m,\Omega_k}=\xi^{(d-2m)(k-1)}\ |u^{(k)}|^2_{m,\Omega_1},$$

所以

$$|u|^2_{m,\Omega}=\sum_{k=1}^{\infty}\ |u|^2_{m,\Omega_k}=\sum_{k=1}^{\infty}\xi^{(d-2m)(k-1)}|u^{(k)}|^2_{m,\Omega_1}.$$

因为空间 $S(\Omega_1)$是有限维的，并且问题(10.2)的解是存在唯一的，所以

$$|u^{(k)}|^2_{m,\Omega_1}\leqslant C(|y_k|^2+|y_{k-1}|^2).$$

由不等式(3.8)即得$|u|^2_{m,\Omega}<+\infty$。 ▮

当 $a(u,v)$是对称半正定双线性泛函时，还可以有第一类迭代法。按迭代式

$$K_{l+1}=K_l-A_l^{\mathrm T}(K_l'+\xi^{(d-2m)k}\ K_l)^{-1}A_l,$$

$$K_{l+1}'=K_l'-\xi^{2(d-2m)k}\ A_l(K_l'+\xi^{(d-2m)k}\ K_l)^{-1}A_l^{\mathrm T},$$

$$A_{l+1}=\xi^{(d-2m)k}A_l(K_l'+\xi^{(d-2m)k}\ K_l)^{-1}A_l,$$

我们可以得到 $\Omega\backslash\xi^{2^l}\Omega$ 上的组合刚度矩阵

$$\begin{pmatrix} K_l & -A_l^{\mathrm T}\\ -A_l & K_l'\end{pmatrix},$$

然后取子空间

$$D_k(\Omega)=\{u\in S(\Omega);\ \ u|_{\xi^{2^l}\Omega}\in(P_{m-1}(\xi^{2^l}\Omega))^N\},$$

即可得到近似的组合刚度矩阵 $K_z^{(l)}$。证明的方法与前面各节完全相同，此处不再重复。

§11 Stokes外问题（二）

我们讨论第一章§11中的算法。以 $x=(x_1,x_2)$ 记 $\boldsymbol{R}^2$ 中的点，Ω 为第一章§11中的区域。设 $u=(u_1,u_2)$为速度，p 为压力，则所讨论的方程是

$$\mu\left(-\frac{1}{x_1}\nabla\ (x_1\nabla u_1)\ +\frac{1}{x_1^2}u_1\ \right)+\frac{\partial p}{\partial x_1}=0,$$

$$-\frac{\mu}{x_1}\nabla(x_1\nabla u_2)+\frac{\partial p}{\partial x_2}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1u_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(x_1u_2)=0,$$

其中常数$\mu>0$是粘性系数。定义双线性泛函

$$a(u,v)=\mu\int x_1\left(\nabla u_1\cdot\nabla v_1+\nabla u_2\cdot\nabla v_2+\frac{u_1v_1}{x_1^2}\right)\mathrm{d}x,\qquad(11.1)$$

$$b(u,p)=\int p\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1u_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(x_1u_2)\right)\mathrm{d}x.\qquad(11.2)$$

引进范数

$$\|p\|_0=\int_\Omega x_1p^2(x)\mathrm{d}x,$$

$$\|u_2\|_1=\int_\Omega x_1\left(|\nabla u_2(x)|^2+\frac{u_2^2(x)}{|x|^2}\right)\mathrm{d}x,$$

$$\|u_1\|_{1,*}=\int_\Omega x_1\left(|\nabla u_1(x)|^2+\frac{u_1^2(x)}{x_1^2}\right)\mathrm{d}x,$$

以及对应的 Hilbert 空间$Z^0(\Omega),Z^1(\Omega),Z^{1,*}(\Omega)$。

在对Ω作了如图18的剖分以后，我们引进无限元空间

$$S(\Omega)=\{p\in Z^0(\Omega);\ p|_{e_i}\in P_0(e_i),i=1,2,\cdots\},$$

$$U(\Omega)=\{u=(u_1,u_2);\ u_1\in Z^{1,*}(\Omega),u_1|_{e_i}\in P_2(e_i),i=1,2,\cdots,$$

$$u_2\in Z^1(\Omega),\ u_2|_{e_i}\in P_2(e_i),i=1,2,\cdots\},$$

$$U_0(\Omega)=\{u\in U(\Omega);\ u|_{\Gamma_0}=0\},$$

$$U(\Gamma_0)=\{u|_{\Gamma_0};\ u\in U(\Omega)\},$$

则可以提出如下的无限元格式：求$u\in U(\Omega),P\in S(\Omega)$，使

$$u|_{\Gamma_0}=f\in U(\Gamma_0),$$

u,p满足方程

$$\begin{cases} a(u,v)-b(v,p)=0, & \forall v\in U_0(\Omega), \\ b(u,q)=0, & \forall q\in S(\Omega). \end{cases} \tag{11.3}$$

作 $U(\Omega)$ 的子空间

$$V(\Omega)=\{u\in U(\Omega);\ b(u,p)=0, \forall p\in S(\Omega)\},$$

$$V_0(\Omega)=\{u\in V(\Omega);\ u|_{\Gamma_0}=0\},$$

则问题(11.3)的解 u 满足：$u|_{\Gamma_0}=f$，$u\in V(\Omega)$，使

$$a(u,v)=0, \quad \forall v\in V_0(\Omega). \tag{11.4}$$

由§10，对于问题(11.4)，有组合刚度矩阵 K_z，它是对称半正定的。我们在下面还将证明它是正定的。

考虑更为一般的外部区域 Ω_0。设折线 Γ_0 将 Ω_0 分割为 Ω^* 与 Ω，其中 Ω^* 是有界区域(图23)。在 Ω^* 上作常规的剖分。类似地，作空间 $S(\Omega_0)$，$U(\Omega_0)$，$U_0(\Omega_0)$，$U(\Gamma)$ 与 $V(\Omega_0)$，$V_0(\Omega_0)$。取 $f\in U(\Gamma)$，则可以提出如下问题：求 $u\in V(\Omega_0)$，使 $u|_\Gamma=f$，并且

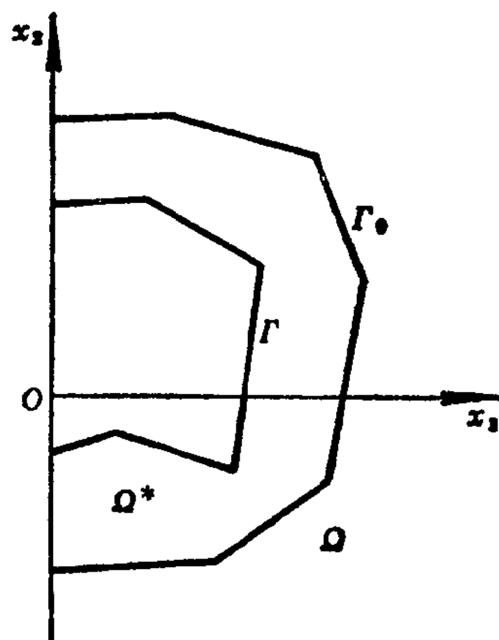


图 23

$$a(u,v)=0, \quad \forall v\in V_0(\Omega_0). \tag{11.5}$$

引理11.1 在 $U_0(\Omega_0)$ 上，$a(\cdot,\cdot)$ 是对称正定的。

证明 由(11.1)

$$a(u,u)_{\Omega_0}=\mu\int_{\Omega_0} x_1\left(|\nabla u_1|^2+|\nabla u_2|^2+\frac{u_1^2}{x_1^2}\right)\mathrm{d}x.$$

由不等式(1.1)即得

$$a(u,u)_{\Omega_0}\geqslant C^{-1}(\|u_1\|_{1,*}^2+\|u_2\|_1^2). \quad \blacksquare$$

由引理11.1，问题(11.5)有唯一解。

令 $y_0=B_0u, z_0=B_0v$，其中 u 为问题(11.5)的解，则

$$a(u,v)_{\Omega_0}=a(u,v)_{\Omega^*}+z_0^{\mathrm{T}}K_z\,y_0. \qquad (11.6)$$

类似地，可以引进有限元空间 $S(\Omega^*), U(\Omega^*)$，以及

$$U_0(\Omega^*)=\{u\in U(\Omega^*);\ u|_\Gamma=0\}.$$

问题(11.5)的解 u 在区域 Ω^* 上受到如下的约束：

$$b(u,p)_{\Omega^*}=0, \quad \forall\, p\in S(\Omega^*).$$

将 p 看作 Lagrange 乘子，我们可以得到 (11.5) 的一种新的提法：求 $u\in U(\Omega^*), p\in S(\Omega^*)$，使 $u|_\Gamma=f$，并且

$$a(u,v)_{\Omega^*}+z_0^{\mathrm{T}}K_z\,y_0-b(v,p)_{\Omega^*}=0, \quad \forall\, v\in U_0(\Omega^*), \qquad (11.7)$$

$$b(u,q)_{\Omega^*}=0, \quad \forall\, q\in S(\Omega^*). \qquad (11.8)$$

引理11.2 问题(11.7),(11.8)的解存在且唯一。

证明 先证明唯一性。设 u,p 为齐次问题的解，在(11.8)中取 $q=p$，在(11.7)中取 $v=u$，两式相加得

$$a(u,u)_{\Omega^*}+y_0^{\mathrm{T}}K_z y_0=0.$$

由 $a(u,u)_{\Omega^*}$ 与 K_z 的正定性，$u=0$。在(11.7)式中取 v，使得它在一条内部边的中点上不等于零，在其余节点上都等于零。由(11.2)与 Green 公式，可导出 p 在这条边的两侧是同一个常数。于是 p 在 Ω^* 上是一个常数。再取 $v\in U_0(\Omega^*)$，使

$$\int_{\Omega^*}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1v_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(x_1v_2)\right)\mathrm{d}x\neq 0,$$

则由(11.2)与(11.7)得 $p=0$。

(11.7),(11.8)是有限阶代数方程组，由以上唯一性即得对于任意右端项解的存在性。▎

定理11.1 问题(11.5)与(11.7),(11.8)是等价的。

证明 问题(11.5)可以写为

$$a(u,u)_{\Omega_0}=\min_{\substack{v\in V(\Omega_0)\\ v|_\Gamma=f}} a(v,v).$$

任取$v\in V(\Omega^*)$，在Ω上延拓v，使它为问题(11.4)的解，并且保持v在Γ_0上的连续性。由(11.4)的解的唯一性，这个延拓是唯一的。将这样所得的函数的集合记作P，则问题(11.5)的解$u\in P$。因此

$$a(u,u)_{\Omega_0}=\min_{\substack{v\in P\\ v|_\Gamma=J}} a(v,v)_{\Omega_0}.$$

注意到(11.6)并引进 Lagrange 乘子p，即得(11.7)，(11.8)。 ▎

现在证明第一章§11中的算法。首先，第一章中用(11.5)，(11.6)表示的解存在且唯一。证明的方法与引理11.2完全相同，此处不重复。然而，我们要着重说明的是，只有当y_0与y_1满足第一章(11.8)式时，这个解才有物理意义。否则不可能有一个不可压缩的流动，所得到的y^*，q只是作为求解的中间变量而存在。另外，我们在一个指定的单元上让压力等于零。如果y_0与y_k满足第一章(11.8)式，则对于任意的$p\in S(\Omega\backslash\overline{\xi^k\Omega})$，设$p$在指定的单元上的值为$p_0$，则$p-p_0$满足要求，又由于$p_0$是一个常数，所以有

$$b(u,p-p_0)_{\Omega\backslash\overline{\xi^k\Omega}}=0,\qquad b(u,p_0)_{\Omega\backslash\overline{\xi^k\Omega}}=0.$$

即得

$$b(u,p)_{\Omega\backslash\overline{\xi^k\Omega}}=0,\qquad \forall p\in S(\Omega\backslash\overline{\xi^k\Omega}).\qquad(11.9)$$

因此实际上(11.9)对于任意的分片常数p都成立。如果y_0与y_k不满足第一章(11.8)式，则上述证明不成立。这就是我们在第一章的迭代法中，需要引进约束(11.8)，(11.14)，(11.16)的缘故。

下面证明第一章§11中第一类迭代法的收敛性。

引理11.3 转移矩阵X的特征值λ均满足$|\lambda|<\xi^{-\frac{1}{2}}$。

证明 设λ是一个特征值，g是对应的特征向量，令$y_0=g$。以u记问题(11.4)的解，则

$$y_k=X^ky_0=\lambda^kg,\qquad k=1,2,\cdots.$$

由相似性

$$a(u,u)_\Omega=\sum_{k=1}^{\infty}a(u,u)_{\Omega_k}=\sum_{k=1}^{\infty}\xi^{k-1}\lambda^{2(k-1)}a(u,u)_{\Omega_1}.$$

因为$a(u,u)_\Omega$是有界的，所以$|\lambda|<\xi^{-\frac{1}{2}}$. ▌

取定$g\in\boldsymbol{R}^{2N}$. 任取自然数k，作$V(\Omega)$的子空间

$$D_k(\Omega)=\{u\in V(\Omega);\ B_k u=\alpha g,\ \alpha\in\boldsymbol{R}\}.$$

取 $f\in U(\Gamma_0)$，作 $\bar{u}_k\in D_k(\Omega)$，$\bar{u}_k|_{\Gamma_0}=f$，并且满足

$$a(\bar{u}_k,\bar{u}_k)=\min_{\substack{v|_{\Gamma_0}=f\\ v\in D_k(\Omega)}}a(v,v). \tag{11.10}$$

问题(11.10)有唯一解. 以K_z记Ω上的组合刚度矩阵，则

$$a(\bar{u}_k,\bar{u}_k)=a(\bar{u}_k,\bar{u}_k)_{\Omega\setminus\overline{\xi^k\Omega}}+\xi^k(\alpha g)^{\mathrm{T}}K_z(\alpha g), \tag{11.11}$$

存在对称矩阵$\overline{K}_z^{(k)}$，使

$$a(\bar{u}_k,\bar{u}_k)_{\Omega\setminus\overline{\xi^k\Omega}}=y_0^{\mathrm{T}}\overline{K}_z^{(k)}y_0.$$

定理11.2 $\lim\limits_{k\to\infty}\overline{K}_z^{(k)}=K_z.$ (11.12)

证明 类似于空间$D_k(\Omega)$，我们定义

$$D_k(\xi^{k-1}\Omega)=\{u\in V(\xi^{k-1}\Omega);\ B_k u=\alpha g,\ \alpha\in\boldsymbol{R}\}.$$

设u为问题(11.4)的解，

$$y_m=B_m u,\qquad m=0,1,\cdots.$$

作 $w^{(k)}\in V(\Omega)$，使

$$w^{(k)}|_{\Omega\setminus\overline{\xi^{k-1}\Omega}}=u|_{\Omega\setminus\overline{\xi^{k-1}\Omega}},\qquad w^{(k)}|_{\xi^{k-1}\Omega}\in D_k(\xi^{k-1}\Omega),$$

并且

$$a(w^{(k)},w^{(k)})_{\xi^{k-1}\Omega}=\min_{\substack{B_{k-1}v=y_{k-1}\\ v\in D_k(\xi^{k-1}\Omega)}}a(v,v)_{\xi^{k-1}\Omega}.$$

由第一章(11.14)式，α由y_0唯一确定. 以y_0与αg作为边界条件，$\bar{u}_k$ 在$\Omega\setminus\overline{\xi^k\Omega}$上使二次泛函$a(\cdot,\cdot)$取最小. 因此

$$a(\bar{u}_k,\bar{u}_k)_{\Omega\setminus\overline{\xi^k\Omega}}\leqslant a(w^{(k)},w^{(k)})_{\Omega\setminus\overline{\xi^k\Omega}}$$

$$=a(u,u)_{\Omega\setminus\overline{\xi^{k-1}\Omega}}+a(w^{(k)},w^{(k)})_{\Omega_k}$$

$$=a(u,u)_{\Omega}-a(u,u)_{\xi^{k-1}\Omega}+a(w^{(k)},w^{(k)})_{\Omega_k}. \quad (11.13)$$

由引理11.3

$$|y_{k-1}|<C\eta^{k-1},\qquad \eta<\xi^{-\frac{1}{2}},$$

因此

$$a(u,u)_{\xi^{k-1}\Omega}=\xi^{k-1}y_{k-1}^{\mathrm{T}}K_z y_{k-1}$$
$$\leqslant C\xi^{k-1}\eta^{2(k-1)}\to 0(k\to\infty).$$

又

$$a(w^{(k)},w^{(k)})_{\Omega_k}=\xi^{k-1}(y_{k-1}^{\mathrm{T}},ag^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix}K_0 & -A^{\mathrm{T}}\\ -A & K_0'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_{k-1}\\ ag\end{pmatrix},$$

由第一章(11.14)式

$$|a|\leqslant C\xi^{-2k}, \quad (11.14)$$

也有

$$a(w^{(k)},w^{(k)})_{\Omega_k}\to 0(k\to\infty).$$

因为$D_k(\Omega)$是$V(\Omega)$的子空间，所以

$$a(\bar{u}_k,\bar{u}_k)\geqslant a(u,u). \quad (11.15)$$

由(11.14)得

$$\xi^k(ag)^{\mathrm{T}}K_z(ag)\to 0(k\to\infty).$$

由(11.11),(11.13),(11.15)以及上面各极限关系式得

$$\lim_{k\to\infty}a(\bar{u}_k,\bar{u}_k)_{\Omega\setminus\overline{\xi^k\Omega}}=a(u,u).$$

写成矩阵形式即得(11.12)。 ▌

我们再证明第二类迭代法的收敛性。给定对称半正定矩阵$K_z^{(0)}$，取$k\geqslant 1$，作$V(\Omega)$上的二次泛函

$$a_k(u,u)=a(u,u)_{\Omega\setminus\overline{\xi^k\Omega}}+\xi^k y_k^{\mathrm{T}}K_z^{(0)}y_k, \quad (11.16)$$

其中$y_k=B_k u$。对于$f\in U(T_0)$，u_k为如下问题的解，在区域$\Omega\setminus\overline{\xi^k\Omega}$上它是唯一的。

$$a_k(u_k,u_k)=\min_{\substack{v\in V(\Omega)\\ v|_{\Gamma_0}=f}}a_k(v,v). \quad (11.17)$$

存在对称矩阵 $K_z^{(k)}$，使

$$a_k(u_k, u_k) = y_0^T K_z^{(k)} y_0.$$

考虑一个辅助问题：求 $\tilde{u}_k \in V(\Omega \setminus \overline{\xi^k \Omega})$，使 $\tilde{u}_k|_{\Gamma_0} = f$，并且满足

$$a(\tilde{u}_k, \tilde{u}_k)_{\Omega \setminus \overline{\xi^k \Omega}} = \min_{\substack{v \in V(\Omega \setminus \overline{\xi^k \Omega}) \\ v|_{\Gamma_0} = f}} a(v, v)_{\Omega \setminus \overline{\xi^k \Omega}}.$$

它有唯一解。

引理11.4 $\lim\limits_{k \to \infty} a(\tilde{u}_k, \tilde{u}_k)_{\Omega \setminus \overline{\xi^k \Omega}} = a(u, u)_\Omega$.

本引理的证明与引理9.1相同，从略。

定理11.3
$$\lim_{k \to \infty} K_z^{(k)} = K_z. \tag{11.18}$$

证明 由(11.17)，

$$a_k(\bar{u}_k, \bar{u}_k) \geqslant a_k(u_k, u_k), \tag{11.19}$$

其中$\bar{u}_k$为(11.10)的解．由(11.16)式，

$$a_k(\bar{u}_k, \bar{u}_k) = a(\bar{u}_k, \bar{u}_k)_{\Omega \setminus \overline{\xi^k \Omega}} + \xi^k (ag)^T K_z^{(0)} (ag). \tag{11.20}$$

由(11.14)，

$$|\xi^k (ag)^T K_z^{(0)} (ag)| \leqslant C \xi^{-3k}. \tag{11.21}$$

因为 $K_z^{(0)}$是半正定的，所以

$$a(\tilde{u}_k, \tilde{u}_k)_{\Omega \setminus \overline{\xi^k \Omega}} \leqslant a(u_k, u_k)_{\Omega \setminus \overline{\xi^k \Omega}} \leqslant a_k(u_k, u_k). \tag{11.22}$$

由定理11.2与(11.20)，(11.21)式，

$$\lim_{k \to \infty} a_k(\bar{u}_k, \bar{u}_k) = a(u, u).$$

由(11.19)．(11.22)式以及引理11.4得

$$\lim_{k \to \infty} a_k(u_k, u_k) = a(u, u),$$

写成矩阵形式即得(11.18)． ▎

§12 非齐次方程及 Helmholtz 方程

考虑§4图21所表示的多边形区域Ω。设$p\in L^2(\Omega)$。在Ω上考虑方程

$$-\Delta u=p, \tag{12.1}$$

以及边界条件

$$u|_{\Gamma^*}=u|_{\Gamma_*}=0, \tag{12.2}$$

$$u|_{\Gamma_0}=0. \tag{12.3}$$

在Ω上作相似的无限剖分以后，令

$$S_0(\Omega)=\{u\in H^1(\Omega);\ u|_{e_i}\in P_1(e_i),\ i=1,2,\cdots,u|_{\partial\Omega}=0\},$$

则无限元解$u\in S_0(\Omega)$，并且

$$a(u,v)=(p,v),\qquad \forall v\in S_0(\Omega), \tag{12.4}$$

其中$(\cdot,\cdot)$是L^2内积，$a(\cdot,\cdot)$由(1.4)所定义，相应的无穷代数方程组是第一章的方程(8.1)，

$$-Ay_{k-1}+Ky_k-A^{\mathrm T}y_{k+1}=p_k,\qquad k=1,2,\cdots. \tag{12.5}$$

设b_i是Γ_k上的第i个节点。型函数$\varphi\in S_0(\Omega)$，并且φ仅在b_i上等于1，在其余节点上都等于零，则向量p_k的第i个分量

$$p_k^{(i)}=(p,\varphi).$$

令$D=\operatorname{supp}\varphi$，则由 Schwarz 不等式得

$$|p_k^{(i)}|\leqslant\|p\|_{0,D}\|\varphi\|_{0,D}\leqslant\|p\|_{0,\Omega}\|\varphi\|_{0,D}.$$

容易看出，D的面积有上界$C\xi^{2k}$，所以

$$|p_k^{(i)}|\leqslant C\xi^k\|p\|_{0,\Omega}. \tag{12.6}$$

考虑一个辅助的无穷阶代数方程组

$$\begin{cases}-Az_0^{(m)}+Kz_1^{(m)}-A^{\mathrm T}z_2^{(m)}=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ -Az_{m-2}^{(m)}+Kz_{m-1}^{(m)}-A^{\mathrm T}z_m^{(m)}=0,\\ -Az_{m-1}^{(m)}+Kz_m^{(m)}-A^{\mathrm T}z_{m+1}^{(m)}=p_m,\\ -Az_m^{(m)}+Kz_{m+1}^{(m)}-A^{\mathrm T}z_{m+2}^{(m)}=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{cases} \tag{12.7}$$

并且求一个特解。下面，为书写简单起见，略去上标m。这个特解可以这样构造：

$$z_{k+1}=Xz_k,\qquad 当k\geqslant m,\tag{12.8}$$

$$z_{k-1}=\tilde{X}z_k,\qquad 当k\leqslant m,\tag{12.9}$$

其中转移矩阵$\tilde{X}$对应于外问题(参看§6，由于所讨论的问题不同，此处$X,\tilde{X}$与§6中的转移矩阵恰好互换位置)。这样，(12.7)中所有的齐次方程都已满足，我们只需要求z_m。设$u^{(m)}$为$\{z_k\}$的插值函数，由转移矩阵X的性质可知$u^{(m)}\in S(\Omega)$。以(12.8)，(12.9)代入(12.7)得

$$(K-A\tilde{X}-A^{\mathrm{T}}X)z_m=p_m.\tag{12.10}$$

引理12.1 方程组(12.10)有唯一解z_m，满足

$$|z_m|\leqslant C|p_m|.\tag{12.11}$$

证明 设O点的两条邻边Γ^*,Γ_*的方程为$\theta=0$与$\theta=\alpha$，我们考虑角形区域

$$\Omega^\infty=\{(r,\theta);\ 0<r<\infty,\ 0<\theta<\alpha\}.$$

类似于空间$S(\Omega)$可以构造空间$S(\Omega^\infty)$。

为证明(12.10)解的存在唯一性，只要证明对应的齐次方程只有零解。设z_m是一个齐次方程的解。由(12.8)，(12.9)可以确定z_k，$-\infty<k<+\infty$，所得到的插值函数$u^{(0)}\in S(\Omega^\infty)$，并且满足

$$a(u^{(0)},v)=0,\qquad \forall v\in S(\Omega^\infty).$$

取$v=u^{(0)}$，得$a(u^{(0)},u^{(0)})=0$，于是$u^{(0)}=0$，因此$z_m=0$。

再证明不等式(12.11)。由(12.10)可得

$$z_m=(K-A\tilde{X}-A^{\mathrm{T}}X)^{-1}p_m,$$

因此有(12.11)。 ▌

引理12.2 级数$u_2=\sum\limits_{m=1}^{\infty}u^{(m)}$在$C(\bar{\Omega})$与$H^1(\Omega)$中均收敛，并且有

$$\|u_2\|_{0,\infty,\Omega}+\|u_2\|_{1,\Omega}\leqslant C\|p\|_{0,\Omega}.$$

证明 由(12.6)，(12.11)得

$$|z_m| \leqslant C\xi^m \|p\|_{0,\Omega}. \qquad (12.12)$$

由转移矩阵 $X, \bar{X}$ 的性质得

$$\|u^{(m)}\|_{0,\infty,\Omega} \leqslant C\xi^m \|p\|_{0,\Omega}.$$

由此得到了$C(\bar{\Omega})$中的收敛性及估计。

作相似变换$x \to \xi^{-m}x$，则Γ_m变为Γ_0。设

$$\tilde{u}^{(m)}(x) = u^{(m)}(\xi^m x),$$

则$\tilde{u}^{(m)}$在Ω上以及在Γ_0外都是无限元解。由(12.12)可得

$$\int_{\Omega^\infty} |\nabla \tilde{u}^{(m)}|^2 \mathrm{d}x \leqslant C\xi^m \|p\|_{0,\Omega}.$$

上述自变量的变换不影响积分值，因此

$$\int_{\Omega^\infty} |\nabla u^{(m)}|^2 \mathrm{d}x \leqslant C\xi^m \|p\|_{0,\Omega}.$$

由 Friedrichs 不等式，

$$\|u^{(m)}\|_{1,\Omega} \leqslant C\xi^m \|p\|_{0,\Omega}.$$

由此得到了$H^1(\Omega)$中的收敛性及估计。 ▎

至此，我们确实得到了一个满足方程(12.1)和边界条件(12.2)的特解。按第一章§8中的办法，就可以求边值问题的解。

下面，将边界条件(12.2)改为 Neumann 条件

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\Gamma^*} = \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_*} = 0, \qquad (12.13)$$

相应的空间是

$$S_0(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega);\ u|_{e_i} \in P_1(e_i),\ i = 1,2,\cdots,\ u|_{\Gamma_0} = 0\}.$$

这时同样有方程组(12.5)。令

$$p_0 = -\sum_{k=1}^{\infty} p_k,$$

同时按如下的递推关系式确定$\tilde{p}_k (k = 0,1,\cdots)$：

$$\tilde{p}_0 = p_0,$$

$$\tilde{p}_m = \tilde{p}_{m-1} + p_m, \qquad m = 1, 2, \cdots.$$

容易看出

$$\tilde{p}_m = \sum_{k=0}^{m} p_k = -\sum_{k=m+1}^{\infty} p_k.$$

由不等式(12.6)得

$$|\tilde{p}_m| \leqslant C\zeta^m \|p\|_{0,\Omega}. \tag{12.14}$$

考虑一个辅助的无穷代数方程组($m = 1, 2, \cdots$)

$$-Az_0^{(m)} + Kz_1^{(m)} - A^{\mathrm{T}}z_2^{(m)} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-Az_{m-3}^{(m)} + Kz_{m-2}^{(m)} - A^{\mathrm{T}}z_{m-1}^{(m)} = 0,$$

$$-Az_{m-2}^{(m)} + Kz_{m-1}^{(m)} - A^{\mathrm{T}}z_m^{(m)} = \tilde{p}_{m-1}, \tag{12.15}$$

$$-Az_{m-1}^{(m)} + Kz_m^{(m)} - A^{\mathrm{T}}z_{m+1}^{(m)} = -\tilde{p}_{m-1}, \tag{12.16}$$

$$-Az_m^{(m)} + Kz_{m+1}^{(m)} - A^{\mathrm{T}}z_{m+2}^{(m)} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

类似于(12.10)可以导出方程组

$$(K - A\bar{X})z_{m-1} - A^{\mathrm{T}}z_m = \tilde{p}_{m-1}, \tag{12.17}$$

$$-Az_{m-1} + (K - A^{\mathrm{T}}X)z_m = -\tilde{p}_{m-1}. \tag{12.18}$$

引理12.3 方程组(12.17),(12.18)有解。当令 z_m的最后一个分量等于零时，这个解是唯一的，并且满足

$$|z_{m-1}| + |z_m| \leqslant C|\tilde{p}_{m-1}|. \tag{12.19}$$

证明 首先我们求(12.17),(12.18)的对应的齐次方程的通解。设 z_{m-1}, z_m是齐次方程的一个解。令

$$z_{k+1} = Xz_k, \qquad 当k \geqslant m, \tag{12.20}$$

$$z_{k-1} = \bar{X}z_k, \qquad 当k \leqslant m-1, \tag{12.21}$$

则得到$u^{(0)} \in S(\Omega^\infty)$，满足

$$a(u^{(0)}, v) = 0, \qquad \forall v \in S(\Omega^\infty).$$

取$v = u^{(0)}$可以得到 $u^{(0)}$是常数，即 $z_k = ag_1$。反之，若取 $z_{m-1} = z_m = ag_1$，由引理6.1，它确是齐次方程的解，因此它就是通解。

现在

$$(g_1^{\mathrm{T}}, g_1^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix} \tilde{p}_{m-1} \\ -\tilde{p}_{m-1} \end{pmatrix} = 0,$$

所以方程组(12.17),(12.18)有解。设 z_{m-1}, z_m 是任一特解，则通解是 $z_{m-1}+\alpha g_1, z_m+\alpha g_1$。适当取 α，可以使 z_m 的最后一个分量等于零，这时解已唯一确定，利用矩阵求逆即可证明不等式(12.19)。 ▌

设$\{z_k^{(m)}\}$的插值函数为 $u^{(m)}$，则象引理 12.2一样，可以证明

引理12.4 级数$u_2=\sum_{m=1}^{\infty} u^{(m)}$在$C(\bar{\Omega})$及 $H^1(\Omega)$中均收敛，并且有

$$\|u_2\|_{0,\infty,\Omega}+\|u_2\|_{1,\Omega} \leqslant C\|g\|_{0,\Omega}.$$

我们确实得到了一个满足方程(12.1)和边界条件(12.13)的特解。

附注

若 p 是有界函数，则估计式(12.6)还可以作改进。这时

$$|p_k^{(i)}| \leqslant \int_D |p|\,\mathrm{d}x \leqslant C\xi^{2k}\|p\|_{0,\infty,\Omega}.$$

由引理12.1,引理12.3还可以得

$$|z_k^{(m)}| \leqslant C\xi^{2m}\|p\|_{0,\infty,\Omega}. \tag{12.22}$$

现在讨论 Helmholtz 方程。考虑边界条件(12.13)，作复Соболев空间的子空间

$$S(\Omega)=\{u\in H^1(\Omega);\ u|_{e_i}\in P_1(e_i),\ i=1,2,\cdots\},$$

$$S_0(\Omega)=\{u\in S(\Omega);\ u|_{\Gamma_0}=0\},$$

$$S(\Gamma_0)=\{u|_{\Gamma_0};\ u\in S(\Omega)\}.$$

设λ为复常数，在$S(\Omega)$上考虑一·五线性型

$$a_\lambda(u,v)=\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\overline{\frac{\partial v}{\partial x_1}}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\overline{\frac{\partial v}{\partial x_2}}+\lambda u\bar{v}\right)dx$$

以及边值问题：已知 $f\in S(\Gamma_0)$，求 $u\in S(\Omega)$，使 $u|_{\Gamma_0}=f$，并且

$$a_\lambda(u,v)=0,\qquad \forall v\in S_0(\Omega). \tag{12.23}$$

已知当 $\lambda=0$时，(12.23)有唯一解，我们将这个解记作 u_0。令$u_1=u-u_0$，则u_1满足

$$a_0(u_1,v)=-\lambda(u_1+u_0,v),\qquad \forall v\in S_0(\Omega). \tag{12.24}$$

考虑辅助问题：已知 $p\in L^2(\Omega)$，求 $u\in S_0(\Omega)$，使

$$a_0(u,v)=(p,v),\qquad \forall v\in S_0(\Omega). \tag{12.25}$$

(12.25)定义了一个有界线性算子U：$L^2(\Omega)\to S_0(\Omega)$。由(12.24)得

$$u_1=-\lambda U(u_1+u_0).$$

由嵌入定理，U：$L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$是一个紧算子。由 Riesz-Schauder 定理[48]，除了可数个孤立的特征值以外，$I+\lambda U$是可逆的。以 $R(\lambda)$记逆算子，则有

$$u_1=\lambda R(\lambda)Uu_0,$$

即

$$u=u_1+u_0=u_0+\lambda R(\lambda)Uu_0\equiv V(\lambda)f.$$

我们已经证明了

定理12.1 存在有界线性算子 $V(\lambda)$：$S(\Gamma_0)\to S(\Omega)$，在复平面λ上，除了可数个点以外，它是解析的，并且(12.23)有唯一解，可以表示为 $u=V(\lambda)f$.

从定理12.1立即可以发现转移矩阵 $X(\lambda)$也具有同样的解析性。

设μ是问题(12.23)的最小特征值，即在圆$|\lambda|<\mu$内 $V(\lambda)$是解析的，我们考虑当点 x 趋于O点时，解 u 的性态。由第一章§12，

$$y_k=X(\lambda\xi^{2(k-1)})X(\lambda\xi^{2(k-2)})\cdots X(\lambda\xi^2)X(\lambda)y_0.$$

当k充分大时，$|\lambda\xi^{2(k-1)}|$可以任意地小。我们关心的是当 $k\to\infty$

时y_k的渐近性，所以不妨设$|\lambda|\leqslant\mu-\varepsilon$，其中 $\varepsilon>0$。

定理12.2　如果$|\lambda|\leqslant\mu-\varepsilon$，则当$k\to\infty$时，矩阵乘积

$$X(\lambda\xi^{2(k-1)})X(\lambda\xi^{2(k-2)})\cdots X(\lambda\xi^2)X(\lambda)$$

关于λ一致收敛。

证明　作 Jordan 标准形

$$TX_0T^{-1}=J_0=\begin{pmatrix}1 & \\ & J_1\end{pmatrix},$$

其中 $X_0=X(0)$，J_1由矩阵X_0的绝对值小于1的特征值的 Jordan 块组成。令

$$J(\lambda)=TX(\lambda)T^{-1},$$

则$J(0)=J_0$。$J(\lambda)$为λ的解析函数。令

$$Y_k(\lambda)=J(\lambda\xi^{2(k-1)})J(\lambda\xi^{2(k-2)})\cdots J(\lambda\xi^2)J(\lambda). \tag{12.26}$$

我们只要证明当 $k\to\infty$时 $Y_k(\lambda)$关于λ的一致收敛性。由(3.8)，当$k\to\infty$时$J_1^k\to 0$。我们取适当的自然数m，使

$$\|J_0^m\|=\left\|\begin{pmatrix}1 & \\ & J_1^m\end{pmatrix}\right\|=1.$$

由解析性

$$\|Y_m(\lambda)-J_0^m\|<C|\lambda|. \tag{12.27}$$

记$\xi^{2m}=\eta$，则$0<\eta<1$。由无穷乘积的收敛性可知

$$\|Y_m(\lambda\eta^k)Y_m(\lambda\eta^{k-1})\cdots Y_m(\lambda)\|\leqslant\prod_{i=0}^{k}(1+|\lambda|\eta^i)<C.$$

对于$k\geqslant 1$，取 l 为 k/m 的最大整数部分，则由(12.26)，

$$Y_k(\lambda)=J(\lambda\xi^{2(k-1)})\cdots J(\lambda\xi^{2ml})Y_m(\lambda\xi^{2m(l-1)})\cdots Y_m(\lambda),$$

其中$J(\lambda\xi^{2(k-1)}),\cdots,J(\lambda\xi^{2ml})$仅有有限个，所以$\|Y_k(\lambda)\|$关于 k 与 λ一致有界。又因为$Y_k(\lambda)$是λ的解析函数，所以(12.27)可以加强为

$$\|Y_k(\lambda)-J_0^k\|<C|\lambda|,\qquad k=1,2,\cdots, \tag{12.28}$$

其中常数C与k,λ无关。

利用上述估计，就能用 Cauchy 判别法证明$Y_k(\lambda)$的一致收

敛性。取$k,l>m$，则

$$
\begin{aligned}
&\|Y_k(\lambda)-Y_l(\lambda)\| \\
&\quad=\|(Y_{k-m}(\lambda\xi^{2m})-Y_{l-m}(\lambda\xi^{2m}))Y_m(\lambda)\| \\
&\quad\leqslant\|Y_{k-m}(\lambda\xi^{2m})-Y_{l-m}(\lambda\xi^{2m})\|\cdot\|Y_m(\lambda)\| \\
&\quad\leqslant\{\|Y_{k-m}(\lambda\xi^{2m})-J_0^{k-m}\|+\|J_0^{k-m}-J_0^{l-m}\| \\
&\qquad+\|J_0^{l-m}-Y_{l-m}(\lambda\xi^{2m})\|\}\cdot\|Y_m(\lambda)\| \\
&\quad<C|\lambda|\xi^{2m}+C\|J_0^{k-m}-J_0^{l-m}\|.
\end{aligned}
$$

当$k\to\infty$，J_0^k是收敛的。对于$\varepsilon>0$，先取m充分大，再取k,l充分大，即可使上式右端小于ε。 ▎

定理12.3 对于任给的$g\in \boldsymbol{C}^n$，当$k\to\infty$时，

$$X(\lambda\xi^{2(k-1)})X(\lambda\xi^{2(k-2)})\cdots X(\lambda)g\to\alpha(\lambda)g_1,$$

其中g_1即矩阵X_0的第一个特征向量，$g_1=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha(\lambda)$是$\lambda$的解析函数，它线性地依赖于$g$。以上极限关于$\lambda$为一致。

证明 令

$$Z_k(\lambda)=X(\lambda\xi^{2(k-1)})X(\lambda\xi^{2(k-2)})\cdots X(\lambda),$$

$$Z_\infty(\lambda)=\lim_{k\to\infty} Z_k(\lambda).$$

因为

$$Z_\infty(0)=\lim_{k\to\infty} X_0^k,$$

记此极限为X_0^∞，则由收敛的一致性以及$Z_k(\lambda)$的解析性得

$$\|Z_\infty(\lambda)-X_0^\infty\|<C|\lambda|.$$

又有

$$Z_\infty(\lambda)=Z_\infty(\lambda\xi^{2k})Z_k(\lambda),$$

所以

$$\|Z_\infty(\lambda)-X_0^\infty Z_k(\lambda)\|<C|\lambda|\xi^{2k}.$$

于是

$$|Z_\infty(\lambda)g-X_0^\infty Z_k(\lambda)g|<C|\lambda|\xi^{2k}.$$

由引理2.5，$X_0^\infty Z_k(\lambda)g=a_k(\lambda)g_1$，其中当$k$与$\lambda$固定时$a_k(\lambda)$是一个常数，所以当$k\to\infty$时，$a_k(\lambda)$关于$\lambda$一致收敛。以$a(\lambda)$记$a_k(\lambda)$的极限。因为(12.23)是一个线性问题，所以$a(\lambda)$线性地依赖于$g$。 ▎

下面讨论(12.23)的解u在O点的奇性。令$\lambda u=-p$，利用

引理12.4，可以作$z_k^{(m)}$，$u^{(m)}$，使$u_2=\sum_{m=1}^{\infty}u^{(m)}$为方程(12.1)的一个特解，并且

$$\|u_2\|_{0,\infty,\Omega}+\|u_2\|_{1,\Omega}\leqslant C|\lambda|.$$

将矩阵X_0的特征值排列为

$$1=\lambda_1>|\lambda_2|\geqslant|\lambda_3|\geqslant\cdots,$$

对应的特征向量是$g_1,g_2,\cdots$.

定理12.4 若λ_2是单根，并且$\lambda_2>\xi^2$，则问题(12.23)的解满足

$$\lim_{k\to\infty}(y_k-\alpha(\lambda)g_1)\lambda_2^{-k}=\beta(\lambda)g_2, \tag{12.29}$$

其中$\beta(\lambda)$是解析函数，它线性地依赖于f. 以上极限关于λ为一致.

证明 由(12.20)，当$k\geqslant m$时，

$$z_k^{(m)}=X_0^{k-m}z_m^{(m)}.$$

由定理12.2，u是有界的. 由不等式(12.22)，

$$|z_m^{(m)}|\leqslant C|\lambda|\xi^{2m}.$$

由定理3.3，转移矩阵X_0有一个特征值$\lambda_1=1$，初等因子为一次，特征向量为g_1，所以存在解析函数$\alpha^{(m)}(\lambda)$，$\beta^{(m)}(\lambda)$，使

$$\lim_{k\to\infty}(z_k^{(m)}-\alpha^{(m)}(\lambda)g_1)\lambda_2^{m-k}=\beta^{(m)}(\lambda)g_2,$$

其中

$$|\alpha^{(m)}(\lambda)|+|\beta^{(m)}(\lambda)|\leqslant C|\lambda|\xi^{2m}. \tag{12.30}$$

记$\lambda_2^k g_2(k=0,1,\cdots)$在$\Omega$上的插值函数为$\tilde{u}$，则

$$\|\tilde{u}\|_{0,\infty,\Omega}+\|\tilde{u}\|_{1,\Omega}\leqslant C. \tag{12.31}$$

令

$$z_k^{*(m)}=z_k^{(m)}-\alpha^{(m)}(\lambda)g_1-\beta^{(m)}(\lambda)g_2\lambda_2^{k-m},\quad k=1,2,\cdots,$$

以$u^{*(m)}$表示$z_k^{*(m)}$的插值函数，则由(12.22)，(12.31)，(12.30)，

$$\begin{aligned}&\|u^{*(m)}\|_{0,\infty,\Omega}+\|u^{*(m)}\|_{1,\Omega}\\&\leqslant C|\lambda|\xi^{2m}+C|\alpha^{(m)}(\lambda)|+C|\beta^{(m)}(\lambda)\lambda_2^{-m}|\\&\leqslant C|\lambda|\left\{\xi^{2m}+\left(\frac{\xi^2}{\lambda_2}\right)^m\right\}.\end{aligned}$$

因此只要令 $w=u-\sum_{m=1}^{\infty}u^{*(m)}$，$w$就在$\Omega$上满足齐次方程，并且$w\in S(\Omega)$。

我们考察$u-w$在O点的奇性。从$z^{*(m)}$的定义可得

$$|z_k^{*(m)}|\leqslant\begin{cases}C|\lambda|\xi^{2m}(|\lambda_3|+\varepsilon)^{k-m}, & k\geqslant m,\\ C|\lambda|\xi^{2m}\lambda_2^{k-m}, & k<m,\end{cases}$$

其中$\varepsilon>0$是一个使$\xi^2<|\lambda_3|+\varepsilon<\lambda_2$的常数。则

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{m=1}^{\infty}z_k^{*(m)}\lambda_2^{-k}\right|\\ &\leqslant C|\lambda|\sum_{m=1}^{k}\xi^{2m}(|\lambda_3|+\varepsilon)^{k-m}\lambda_2^{-k}+C|\lambda|\sum_{m=k+1}^{\infty}\xi^{2m}\lambda_2^{-m}\\ &=C|\lambda|\frac{\xi^{2(k+1)}-\xi^2(|\lambda_3|+\varepsilon)^k}{\xi^2-(|\lambda_3|+\varepsilon)}\lambda_2^{-k}+C|\lambda|\frac{\xi^{2(k+1)}/\lambda_2^{k+1}}{1-\xi^2/\lambda_2}\\ &\leqslant C|\lambda|\max\left\{\left(\frac{\xi^2}{\lambda_2}\right)^k,\left(\frac{|\lambda_3|+\varepsilon}{\lambda_2}\right)^k\right\}.\end{aligned}$$

当$k\to\infty$时，关于λ一致地有

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{m=1}^{\infty}z_k^{*(m)}\lambda_2^{-k}=0.$$

因此它对于O点附近的奇性没有贡献．u的奇性即为w的奇性．▌

最后，我们证明第一章中的不等式（12.13）。

定理12.5 μ,μ_1,μ_2都是负数，并且$-\mu\leqslant-\mu_1<-\mu_2$。

证明 在$S_0(\Omega_0)$与$S_0(\Omega)$上分别考察Rayleigh商

$$R(u)=\frac{\int|\nabla u|^2\mathrm{d}x}{\int u^2\mathrm{d}x},$$

则$R(u)>0$，并且[52]

$$-\mu = \min_{\substack{u \in S_0(\Omega_0) \\ u \neq 0}} R(u), \qquad -\mu_1 = \min_{\substack{u \in S_0(\Omega) \\ u \neq 0}} R(u).$$

当$u \in S_0(\Omega)$时，将它在Ω^*上延拓为零。在这个意义下$S_0(\Omega) \subset S_0(\Omega_0)$，因此$-\mu \leqslant -\mu_1$。至于$\mu_2$，从第一章(12.9)式可以看出$\mu_2 = \frac{\mu_1}{\xi^2}$，因为$0 < \xi < 1$，所以$-\mu_2 > -\mu_1$。▌

附　　记

本章的参考文献大致与第一章相同，也补充了一些新材料，重点是第一章中一些结论的证明。

第一、二、三、五节为本章的理论基础，主要取材自[4]，但是我们在这里仍然以 Laplace 方程为例，其中定理3.1与定理3.2是新的。过去的理论不够严密，这两个定理使得数学上的严格性得到了进一步的保证。

第四节介绍平面弹性问题，原来[4]中讨论的就是这个问题。为了理论上的完整性，我们特地安排了第十节，这一节对于相当一般的问题的一般结论进行了叙述与证明，取材于[19]，读者在处理各种不同的问题时，还需要把一般的结论具体化。

安排第六节也是为了理论上的完整性。在此之前的特征值方法中，总是要求转移矩阵的特征向量构成完备组。在实际计算中，上述限制其实并没有引起过麻烦，我们计算过的一些问题都是满足上述限制的，但是毕竟这一限制使理论显得不够完整。为了去掉这个限制，[4]中作了一些努力，但不够理想，在这一节我们给了一个在任何情形下都适用的公式，本节内容来自[22]。

第七节的材料是我们添加的，它是文章[17]的一点补充。

第八节的材料来自[7]与[19]，第九节的材料来自[23]与[26]，第十一节的材料来自[27]，第十二节的材料来自[10]与[20]，它们都是第一章中对应部分的证明。

还需要说明的是，有一些参考文献中的材料我们没有收入，例如[13]中的内边界问题，[17]中角点问题的Fourier方法，以及[14]，[18]，[24]，[28]，[29]中的用有限个单元逼近无限个单元等。对这些感兴趣的读者可以参阅原文。

第三章 收 敛 性

我们在本章给出无限元方法的各种收敛性定理。这些定理表明，对于有奇性的解，无限元方法的精确度不低于有限元方法对于无奇性解的精确度。甚至，无限元方法的精确度还高一些。这一点表现为两个方面，一方面体现在定理3.2中，其中我们给出一个加权的L^2估计，这个估计强于通常的L^2估计；另一方面，在§6中，我们将证明在奇点附近无限元解可以象精确解一样作展开，每一项都逼近于精确解的对应项，这种逐项收敛的性质表明无限元方法是一个很自然的方法，它自动地给出了问题的奇性解。

为叙述简明起见，我们仅就一个模型问题证明收敛性定理。设Ω_0是平面上一个有界的多边形区域，它有一个内角$\alpha>\pi$，其余内角均不大于π。我们以内角α的顶点为坐标原点建立直角坐标系(O,x_1,x_2)，以$x=(x_1,x_2)$或$y=(y_1,y_2)$记Ω_0中的点，同时也建立一个极坐标系(O,r,θ)。在Ω_0上考虑Laplace方程的Dirichlet问题

$$\begin{cases}\Delta u=0, & x\in\Omega_0,\\ u|_{\partial\Omega_0}=f.\end{cases}\tag{0.1}$$

我们假定在O点附近$f=0$，于是可以有展开式

$$u=\sum_{j=1}^{\infty}c_j r^{j\pi/\alpha}\sin\frac{j\pi}{\alpha}(\theta-\theta_0).\tag{0.2}$$

至于其它问题的收敛性，读者可以自己证明平行的结论，或者参看本书最后列出的参考文献。

§1 几个辅助不等式

在本节中，设Ω是$\boldsymbol{R}^2$中具有Lipschitz连续边界的有界区域。

定理1.1 存在只依赖于Ω的常数$C>0$，使得对所有的常数$p\geqslant 1$，以及$u\in H^1(\Omega)$，有

$$\|u\|_{0,p,\Omega}\leqslant C(\|u\|_{0,\Omega}+\sqrt{p}\,|u|_{1,\Omega}),\qquad(1.1)$$

$$\|u\|_{0,p,\Gamma}\leqslant C(\|u\|_{0,\Omega}+\sqrt{p}\,|u|_{1,\Omega}),\qquad(1.2)$$

其中Γ为含于Ω内的直线段.

证明 由Соболев积分恒等式[34]，

$$u(x)=\sum_{i=0}^{2}w_i(x),\quad \forall x\in\bar{\Omega},\qquad(1.3)$$

其中

$$w_0(x)=\int_\Omega K(y)u(y)\mathrm{d}y,$$

$$w_i(x)=\int_\Omega \frac{\partial u(y)}{\partial y_i}\frac{B_i(x,y)}{|x-y|}\mathrm{d}y,\quad i=1,2,$$

$K(y),B_i(x,y)$分别是Ω上及$\Omega\times\Omega$上的有界函数.

由Schwarz不等式，

$$|w_0(x)|\leqslant C\int_\Omega|u(y)|\mathrm{d}y\leqslant C\|u\|_{0,\Omega}.$$

两边取L^2范数得

$$\|w_0\|_{0,\Omega}\leqslant C\|u\|_{0,\Omega}.$$

不妨设$p>2$，记$\rho=|x-y|$，由Hölder不等式，

$$|w_i(x)|\leqslant C\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial y_i}\right|^{\frac{2}{p}}\rho^{-\frac{1}{p}}\left|\frac{\partial u}{\partial y_i}\right|^{1-\frac{2}{p}}\rho^{\frac{1}{p}-1}\mathrm{d}y$$

$$\leqslant C\left(\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial y_i}\right|^2\rho^{-1}\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial y_i}\right|^2\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega\rho^{\frac{2}{p}-2}\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant C\sqrt{p}\,|u|_{1,\Omega}^{1-\frac{2}{p}}\left(\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial y_i}\right|^2\rho^{-1}\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}.$$

两边取L^p范数，右边的积分交换次序，就得到了

$$\|w_i\|_{0,p,\Omega} \leqslant C\sqrt{p}\,|u|_{1,\Omega}, \qquad i=1,2.$$

由(1.3)式即得(1.1)式。(1.2)式的证明是类似的。 ▎

推论 对任意的可测集$D\subset\Omega$,线段$\Gamma\subset\Omega$,若$d=(\text{meas}\,D)^{\frac{1}{2}}<\sigma$, $h=\text{meas}\,\Gamma<\sigma$, 则对所有的$u\in H^1(\Omega)$有

$$\|u\|_{0,D} \leqslant Cd|\log d|^{\frac{1}{2}}\|u\|_{1,\Omega}, \tag{1.4}$$

$$\|u\|_{0,\Gamma} \leqslant Ch|\log h|^{\frac{1}{2}}\|u\|_{1,\Omega}, \tag{1.5}$$

其中常数$\sigma\in(0,1)$, 常数C只依赖于σ和Ω。

证明 由Hölder不等式,

$$\|u\|_{0,D} \leqslant (\text{meas}\,D)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\|u\|_{0,p,\Omega}, \qquad \forall p>2.$$

由定理1.1,

$$\|u\|_{0,D} \leqslant C(\text{meas}\,D)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\sqrt{p}\,\|u\|_{1,\Omega}$$

$$= Cd^{1-\frac{2}{p}}\sqrt{p}\,\|u\|_{1,\Omega}.$$

取$p=3|\log\sigma|^{-1}|\log d|>2$即得(1.4)式。(1.5)式的证明是类似的。 ▎

我们引入一些术语和记号[46]. 设$\hat{D}\subset\boldsymbol{R}^2$是一个给定的有界区域, 如果对于$D\subset\boldsymbol{R}^2$存在一个可逆的仿射变换

$$F:\ \hat{x}(\in\boldsymbol{R}^2)\to F(\hat{x})=Bx+b\in\boldsymbol{R}^2,$$

使得$D=F(\hat{D})$, 则称D与$\hat{D}$仿射等价。Ω中与$\hat{D}$仿射等价的全体子集记为$\mathscr{K}(\Omega)$。设$\hat{P}$为$\hat{D}$上的一个有限维函数空间,$D\in\mathscr{K}(\Omega)$, 定义

$$P_D=\{p:\ D\to\boldsymbol{R};\ p=\hat{p}\circ F^{-1},\hat{p}\in\hat{P}\},$$
$$H(D,\Omega)=\{v\in H^1(\Omega);v|_D\in P_D\}.$$

定理1.2 存在常数$C>0$, 使得对任意的$D\in\mathscr{K}(\Omega)$, 以及任意的$u\in H(D,\Omega)$, 当$h_D=\text{diam}D<1$, 就有

$$\|u\|_{0,\infty,D} \leqslant C \frac{h_D}{\rho_D} |\log h_D|^{\frac{1}{2}} \|u\|_{1,\Omega}, \qquad (1.6)$$

其中diam表示直径，

$$\rho_D = \sup\{\text{diam}\, G,\ G\text{为含于}D\text{中的圆}\}.$$

证明 设$\hat{u} = u(F(\hat{x})) \in \hat{P}$，$\hat{x} \in \hat{D}$，则

$$\|u\|_{0,\infty,D} = \|\hat{u}\|_{0,\infty,\hat{D}}.$$

因为$\hat{P}$是有限维的，所以存在常数$C>0$，使得

$$\|\hat{u}\|_{0,\infty,\hat{D}} \leqslant C \|\hat{u}\|_{0,\hat{D}}.$$

但是

$$\|\hat{u}\|_{0,\hat{D}} = |\det B|^{-\frac{1}{2}} \|u\|_{0,D},$$

$$|\det B| = \frac{\text{meas}\, D}{\text{meas}\, \hat{D}} \geqslant \frac{\pi}{4} \frac{\rho_D^2}{\text{meas}\, \hat{D}}.$$

所以

$$\|u\|_{0,\infty,D} \leqslant C \rho_D^{-1} \|u\|_{0,D}.$$

由定理1.1的推论即得(1.6)式。 ▌

§2 分片多项式的逼近性质

我们引进一些带权的Соболев空间。设具有 Lipschitz 连续边界的有界区域$\Omega \subset \boldsymbol{R}^2$，在 $C^\infty(\bar{\Omega})$ 中引进如下的范数与半范数，其中$p \geqslant 1$，$\sigma < 2$，

$$\|u\|_{0(\sigma),\Omega} = \left(\int_\Omega r^{-\sigma} |u|^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2},$$

$$|u|_{k,p(\sigma),\Omega} = \left\{ \int_\Omega r^{p(k-1)-\sigma} \, |\partial^k u|^p \mathrm{d}x \right\}^{\frac{1}{p}},$$

$$\|u\|_{m,p(\sigma),\Omega} = \left\{ \|u\|_{0,p,\Omega}^p + \sum_{k=1}^m |u|_{k,p(\sigma),\Omega}^p \right\}^{\frac{1}{p}},$$

其中

$$|\partial^k u| = \sum_{\alpha+\beta=k} \left| \frac{\partial^k u}{\partial x_1^\alpha \partial x_2^\beta} \right|, \quad k \geqslant 1.$$

将$C^\infty(\bar{\Omega})$按以上范数完备化以后所得的空间分别记作$H^{0(\sigma)}(\Omega)$与$W^{m,p(\sigma)}(\Omega)$，并且记

$$H^{m(\sigma)}(\Omega)=W^{m,2(\sigma)}(\Omega),\quad \|\cdot\|_{m(\sigma),\Omega}=\|\cdot\|_{m,2(\sigma),\Omega}.$$

由(0.2)容易看出，在O点附近(0.1)的解$u\in W^{m,p(\sigma)}$，其中

$$\sigma<2-\left(1-\frac{\pi}{\alpha}\right)p.$$

定理 2.1 (a) $W^{2,p(\sigma)}(\Omega)\to C(\bar{\Omega})(p>1,2-p<\sigma<2)$，特别地有

$$H^{2(\sigma)}(\Omega)\to C(\bar{\Omega})(0<\sigma<2);$$

(b) $H^1(\Omega)\to H^{0(\sigma)}(\Omega)(0<\sigma<2)$，其中"$\to$"表示连续嵌入。

证明 (a) 由定义，只须证明存在常数$C>0$，使得

$$\max_{x\in\bar{\Omega}}|u(x)|\leqslant C\|u\|_{2,p(\sigma),\Omega},\quad \forall u\in C^\infty(\bar{\Omega}). \tag{2.1}$$

不失一般性，设Ω关于含于其内的某圆是星形的，则有Соболев积分恒等式[34]

$$u(x)=\int_\Omega u(y)p(y)\mathrm{d}y+\sum_{i=1}^{2}b_i(x)\int_\Omega\frac{\partial u(y)}{\partial y_i}p(y)\mathrm{d}y$$

$$+\sum_{|\alpha|=2}\int_\Omega\partial^\alpha u(y)B_\alpha(x,y)\mathrm{d}y,$$

其中α为多重指标，$p(y)$是光滑函数，$b_i(x),B_\alpha(x,y)$都是有界函数，只依赖于Ω。由Hölder不等式，

$$|u(x)|\leqslant C\|u\|_{0,p,\Omega}+C\left|\int_\Omega r^{-\frac{\sigma}{p}}|\partial u|r^{\frac{\sigma}{p}}\mathrm{d}y\right|+C\int_\Omega r^{\frac{p-\sigma}{p}}|\partial^2u|r^{-\frac{p-\sigma}{p}}\mathrm{d}y$$

$$\leqslant C\|u\|_{0,p,\Omega}+C|u|_{1,p(\sigma),\Omega}\left(\int_\Omega r^{\frac{\sigma}{p-1}}\mathrm{d}y\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$+C|u|_{2,p(\sigma),\Omega}\left(\int_\Omega r^{-\frac{p-\sigma}{p-1}}\mathrm{d}y\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

由于$\sigma>2-p$，积分

$$\int_\Omega r^{\frac{\sigma}{p-1}}\mathrm{d}y,\qquad \int_\Omega r^{-\frac{p-\sigma}{p-1}}\mathrm{d}y$$

都是有限值．于是

$$|u(x)|\leqslant C\|u\|_{2,p(\sigma),\Omega}.$$

它就是（2.1）。

（b）取$p=\dfrac{\sigma+2}{2\sigma}$，$q=\dfrac{2p}{p-1}$，因为$H^1(\Omega)\to L^q(\Omega)$，由Hölder不等式，

$$\|u\|_{0(\sigma),\Omega}\leqslant\|u\|_{0,q,\Omega}\left(\int_\Omega r^{-\sigma p}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant C\|u\|_{1,\Omega}. \quad \blacksquare$$

现在，我们考虑本章开始时提到的区域Ω_0。将Ω_0剖分为可数无穷多个三角形单元$e_1,e_2,\cdots,e_i,\cdots$，在O点的任一个邻域之外，剖分是有限的。象通常一样，我们要求每个三角形的一边或者是边界$\partial\Omega_0$的一部分，或者是另一三角形的一边，以h记所有三角形单元的直径的最大值。我们还要求所作的剖分满足下列条件：

（A）剖分是正规的，即所有单元内角有公共下界$\theta_0>0$。

（B）$O\bar{\in}\tilde{e}_i$，$\forall i\in\boldsymbol{N}$。以$d(O,e_i)$记$e_i$到$O$点的距离，则存在常数$\chi$，使

$$\text{meas } e_i\leqslant\chi h^2(\mathrm{d}(O,e_i))^2,\quad \forall i\in\boldsymbol{N}.$$

例如，第一章所作的相似剖分就满足条件（B）。

作无限元子空间$(m\geqslant1)$

$$S^m(\Omega_0)=\{u\in H^1(\Omega_0);u|_{e_i}\in P_m(e_i),\forall i\in\boldsymbol{N}\}.$$

当$m=1$时，$S^m(\Omega_0)$就简单地记作$S(\Omega_0)$。在每个三角形的三边上作m等分，共得$3m$个节点，从这些节点出发，作各边的平行

线，以交点作为节点，共$\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$个节点。定义插值算子

$$\Pi:\ C(\bar{\Omega}_0)\to S^m(\Omega_0).$$

定理2.2 设条件(A)，(B)成立，$p>1$，$2-p<\sigma<p$，$0\leqslant s\leqslant 1$，$1-s+\frac{\sigma}{p}\geqslant 0$，则有插值估计

$$\|u-\Pi u\|_{s,p,\Omega_0}\leqslant Ch^{m+1-s}\ |u|_{m+1,p(\sigma),\Omega_0}, \qquad (2.2)$$

$$\forall u\in W^{m+1,p(\sigma)}(\Omega).$$

证明 首先设$s=0,1$。由定理2.1，$W^{m+1,p(\sigma)}(\Omega_0)\to C(\bar{\Omega}_0)$，因此$\Pi u$有意义。按三角形单元上的插值估计[46]

$$|u-\Pi u|_{s,p,e_i}\leqslant Ch_i^{m+1-s}\ |u|_{m+1,p,e_i}, \qquad (2.3)$$

其中h_i为e_i的直径。

由条件(A)，

$$\text{meas}\ e_i\geqslant h_i^2\sin^3\theta_0\cos\theta_0,$$

由条件(A)，(B)，

$$h_i^2\leqslant\chi\frac{h^2(d(O,e_i))^2}{\sin^3\theta_0\cos\theta_0}.$$

代入(2.3)式得

$$|u-\Pi u|_{s,p,e_i}\leqslant Ch^{m+1-s}\ (d(O,e_i))^{m+1-s}\ |u|_{m+1,p,e_i}.$$

在三角形e_i上，$d(O,e_i)\leqslant r$，因此

$$(d(O,e_i))^{m+1-s}\ |u|_{m+1,p,e_i}$$

$$\leqslant (d(O,e_i))^{1-s+\frac{\sigma}{p}}|u|_{m+1,p(\sigma),e_i}.$$

由区域的有界性假设以及$1-s+\frac{\sigma}{p}\geqslant 0$得

$$|u-\Pi u|_{s,p,e_i}\leqslant Ch^{m+1-s}|u|_{m+1,p(\sigma),e_i}.$$

关于i求和即得(2.2)式。当$0<s<1$，由内插不等式[42]，(2.2)式也成立。▌

定理2.3 设条件(A)，(B)成立，$p>2$，$u\in W^{1,p}(\Omega_0)$，则

$$\lim_{h\to 0}\|u-\Pi u\|_{1,p,\Omega_0}=0.$$

证明 因为$W^{1,p}(\Omega_0)\to C(\bar{\Omega}_0)$[50]，所以$\Pi u$是有意义的。由定理2.2，对于$C^\infty(\bar{\Omega}_0)$中的函数，(2.2)式成立。$C^\infty(\bar{\Omega}_0)$在$W^{1,p}(\Omega_0)$中稠密，任给$\varepsilon>0$，取$v\in C^\infty(\bar{\Omega}_0)$，使

$$\|v-u\|_{1,p}<\varepsilon.$$

取h充分小，使

$$\|v-\Pi v\|_{1,p}<\varepsilon.$$

又Π是$W^{1,p}(\Omega_0)$中的有界算子，所以

$$\|\Pi v-\Pi u\|_{1,p}\leqslant C\|v-u\|_{1,p}.$$

综合以上不等式即得所证。▌

类似于定理2.2，可以证明

定理2.4 设条件(A)，(B)成立，$p>1$，$2-p<\sigma<p$，则有

$$\|u-\Pi u\|_{0,\infty,\Omega_0}\leqslant Ch^{m+1-\frac{2}{p}}|u|_{m+1,p(\sigma),\Omega_0},$$

$$\forall u\in W^{m+1,p(\sigma)}(\Omega_0).$$

§3 H^1与L^2收敛性

令

$$a(u,v)=\int\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x.$$

设$f\in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_0)$，取$u_0\in H^1(\Omega_0)$，使$u_0|_{\partial\Omega_0}=f$。问题(0.1)的弱解提法是：求$u\in H^1(\Omega_0)$，使$u-u_0\in H_0^1(\Omega_0)$，并且

$$a(u,v)=0, \quad \forall v\in H_0^1(\Omega_0). \tag{3.1}$$

作无限剖分以后，得无限元空间$S^m(\Omega_0)$及插值算子Π。令

$$S_0^m(\Omega_0)=S^m(\Omega_0)\cap H_0^1(\Omega_0).$$

取u_0的近似$u_0^I\in S^m(\Omega_0)$，则无限元近似解u_h满足：

$$u_h\in S^m(\Omega_0),\quad u_h-u_0^I\in S_0^m(\Omega_0),$$

并且

$$a(u_h,v)=0, \quad \forall v\in S_0^m(\Omega_0). \tag{3.2$_m$}$$

这里 $(3.2)_m$ 的下标表示使用的是m次单元。

我们估计误差$u-u_h$。针对边界条件作集合

$$V=\{v^I\in S^m(\Omega_0);\ v^I|_{\partial\Omega_0}=(\Pi u-u_0^I)|_{\partial\Omega_0}\}.$$

定理3.1 设条件(A)，(B)成立，问题(3.1)的解

$$u\in H^{m+1(\sigma)}(\Omega_0)\left(0<\sigma<\frac{2\pi}{\alpha}\right),$$

u_h为问题$(3.2)_m$ 的解，则

$$\|u-u_h\|_{1,\Omega_0}\leqslant C(h^m|u|_{m+1(\sigma),\Omega_0}+\min_{v^I\in V}\|v^I\|_{1,\Omega_0}). \tag{3.3}$$

证明 任取$v^I\in V$，令$v=v^I-\Pi u+u_h$，则$v\in S_0^m(\Omega_0)$。由(3.1)及$(3.2)_m$，

$$a(u-u_h,v)=0.$$

于是

$$\begin{aligned}|u-u_h|_{1,\Omega_0}^2&=a(u-u_h,u-u_h)\\&=a(u-u_h,u-\Pi u)+a(u-u_h,\Pi u-u_h)\\&=a(u-u_h,u-\Pi u)+a(u-u_h,v^I).\end{aligned}$$

利用Schwarz不等式得

$$|u-u_h|_{1,\Omega_0}\leqslant|u-\Pi u|_{1,\Omega_0}+|v^I|_{1,\Omega_0}. \tag{3.4}$$

由Friedrichs不等式及迹定理，

$$
\begin{aligned}
\|u-u_h\|_{0,\Omega_0} &\leqslant C(|u-u_h|_{1,\Omega_0}+\|u-u_0^I\|_{0,\partial\Omega_0}) \\
&\leqslant C(|u-u_h|_{1,\Omega_0}+\|u-\Pi u\|_{0,\partial\Omega_0} \\
&\quad +\|\Pi u-u_0^I\|_{0,\partial\Omega_0}) \\
&\leqslant C(|u-u_h|_{1,\Omega_0}+\|u-\Pi u\|_{1,\Omega_0} \\
&\quad +\|v^I\|_{1,\Omega_0}).
\end{aligned}
$$

由(3.4)即得

$$\|u-u_h\|_{1,\Omega_0}\leqslant C(\|u-\Pi u\|_{1,\Omega_0}+\|v^I\|_{1,\Omega_0}).$$

以定理2.2的估计式代入，并关于v^I取最小，即得（3.3)式.▌

推论 如果$u_0^I=\Pi u$，则

$$\|u-u_h\|_{1,\Omega_0}\leqslant Ch^m|u|_{m+1(\sigma),\Omega_0}.$$

以上推论表明，无限元方法有最优的误差估计.

下面讨论加权的L^2估计. 首先考虑一个辅助问题:

$$
\begin{cases}
-\Delta\varphi=g, & x\in\Omega_0, \\
\varphi|_{\partial\Omega_0}=0.
\end{cases}
\tag{3.5}
$$

取$\sigma\in\left(0,\dfrac{2\pi}{\alpha}\right)$，记$\tilde{\sigma}=\sigma-2$. 由定理2.1，当$g\in H^{0(\tilde{\sigma})}(\Omega_0)$时，$\int_{\Omega_0} gv\mathrm{d}x$定义了一个$H_0^1(\Omega_0)$上的线性连续泛函. 因此问题(3.5)有唯一弱解$\varphi\in H_0^1(\Omega_0)$. 还可以证明如下结论[40]:

引理3.1 问题(3.5)的弱解$\varphi\in H^{2(\sigma)}(\Omega_0)$，并且存在不依赖于$g$的常数$C>0$，使

$$\|\varphi\|_{2(\sigma),\Omega_0}\leqslant C\|g\|_{0(\tilde{\sigma}),\Omega_0}.$$

设Ω是L边形，l_j $(j=1,\cdots,L)$是Ω的各边. 利用 Aubin-Nitsche技巧[46]就可以证明:

定理3.2 在定理3.1的假设下，如果还要求u_0,u_0^I在O点的邻

边上都等于零，则有

$$\|u-u_h\|_{0(-\tilde{\sigma}),\Omega_0}$$
$$\leqslant C\Big(h^{m+1}|u|_{m+1(\sigma),\Omega_0}+h\min_{v^I\in V}\|v^I\|_{1,\Omega_0}$$
$$+\sum_{j=1}^{L}\|u_0-u_0^I\|_{-\frac{1}{2},l_j}\Big). \tag{3.6}$$

证明 令$g=r^{\tilde{\sigma}}(u-u_h)$，因为$u-u_h\in H^1(\Omega_0)$，所以由定理2.1可知$g\in H^{0(\tilde{\sigma})}(\Omega_0)$。设$\varphi$为问题(3.5)对于上述函数$g$的解，则由引理3.1，$\varphi\in H^{2(\sigma)}(\Omega_0)$，并且

$$\|\varphi\|_{2(\sigma),\Omega_0}\leqslant C\|u-u_h\|_{0(-\tilde{\sigma}),\Omega_0}. \tag{3.7}$$

由定理2.1，$\varphi\in C(\bar{\Omega}_0)$，因此插值函数$\Pi\varphi$是有意义的。由定理2.2，

$$\|\varphi-\Pi\varphi\|_{1,\Omega_0}\leqslant Ch|\varphi|_{2(\sigma),\Omega_0}. \tag{3.8}$$

由Green公式及(3.1)，$(3.2)_m$ 得

$$\|u-u_h\|^2_{0(-\tilde{\sigma}),\Omega_0}$$
$$=\int_{\Omega_0} r^{\tilde{\sigma}}(u-u_h)(u-u_h)\mathrm{d}x$$
$$=\int_{\Omega_0}(-\Delta\varphi)(u-u_h)\mathrm{d}x$$
$$=a(u-u_h,\varphi)-\int_{\partial\Omega_0}(u-u_h)\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\mathrm{d}s$$
$$=a(u-u_h,\varphi-\Pi\varphi)-\int_{\partial\Omega_0}(u_0-u_0^I)\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\mathrm{d}s. \tag{3.9}$$

注意到u_0与u_0^I在O点的邻边上都等于零，则有

$$\left|\int_{\partial\Omega_0}(u_0-u_0^I)\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}ds\right|\leqslant\sum_{j=1}^{L}\|u_0-u_0^I\|_{-\frac{1}{2},l_j}\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right\|_{\frac{1}{2},l_j}$$

$$\leqslant C\sum_{j=1}^{L}\|u_0-u_0^I\|_{-\frac{1}{2},l_j}\|\varphi\|_{2(\sigma),\Omega_0}.$$

由（3.8)得

$$|a(u-u_h,\varphi-\Pi\varphi)|\leqslant|u-u_h|_{1,\Omega_0}|\varphi-\Pi\varphi|_{1,\Omega_0}$$

$$\leqslant Ch|u-u_h|_{1,\Omega_0}|\varphi|_{2(\sigma),\Omega_0}.$$

将它们都代入(3.9)式得

$$\|u-u_h\|_{0(-\tilde{\sigma}),\Omega_0}^2$$

$$\leqslant C\left(h|u-u_h|_{1,\Omega_0}+\sum_{j=1}^{L}\|u_0-u_0^I\|_{-\frac{1}{2},l_j}\right)\|\varphi\|_{2(\sigma),\Omega_0}.$$

由(3.7)，

$$\|u-u_h\|_{0(-\tilde{\sigma}),\Omega_0}\leqslant C\left(h|u-u_h|_{1,\Omega_0}+\sum_{j=1}^{L}\|u_0-u_0^I\|_{-\frac{1}{2},l_j}\right).\tag{3.10}$$

由定理3.1即得(3.6)式。❙

推论 如果$u_0^I=\Pi u$，则

$$\|u-u_h\|_{0(-\tilde{\sigma}),\Omega_0}\leqslant Ch^{m+1}\|u\|_{m+1(\sigma),\Omega_0}.\tag{3.11}$$

证明 由一维插值估计，只要l_j不是O点的邻边，就有[43]

$$\|u-\Pi u\|_{-\frac{1}{2},l_j}\leqslant Ch^{m+1}\|u\|_{m+\frac{1}{2},l_j}.$$

由迹定理，

$$\|u\|_{m+\frac{1}{2},l_j}\leqslant C\|u\|_{m+1(\sigma),\Omega_0}.$$

将它们代入(3.6)即得(3.11)。❙

§4 极值原理与一致收敛性

从本节开始，我们只考虑线性单元，即只考虑空间 $S(\Omega)$ 中的无限元解。以 $b_i(i=1,2,\cdots)$ 记 $\bar{\Omega}_0$ 上的节点。型函数 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots$ 满足：$\varphi_i\in S(\Omega_0)$，

$$\varphi_i(b_j)=\delta_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots. \tag{4.1}$$

φ_i 的有限线性组合

$$\varphi=c_1\varphi_1+c_2\varphi_2+\cdots+c_i\varphi_i$$

构成的集合记作 $\tilde{S}(\Omega_0)$。则每个 $\varphi\in\tilde{S}(\Omega_0)$ 都满足 $0\bar{\in}\operatorname{supp}\varphi$。关于无限元剖分，除了要求它满足§2中的条件(A)，(B)外，再增加如下两个条件：

(C) 作为 $H^1(\Omega_0)$ 的子空间，$\tilde{S}(\Omega_0)$ 在 $S(\Omega_0)$ 中稠密；

(D) 每个单元 e_i 的内角都不超过 $\frac{\pi}{2}$。

在第二章§3中，我们已经证明了第一章所作的相似剖分是满足条件(C)的。

为了证明极值原理，我们先证明一些辅助的引理[37,44]。

引理4.1 令 $a_{ij}=a(\varphi_i,\varphi_j)$，设条件(D)成立，则

$$a_{ij}\leqslant 0,\quad i\neq j,b_i,b_j\in\bar{\Omega}_0. \tag{4.2}$$

证明 当 b_i 与 b_j 不相邻时，$a_{ij}=0$。当 b_i 与 b_j 相邻时，则它们同属于一个或两个单元。在单元 e_k 上，以 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 记面积坐标。则由条件(D)，

$$\int_{e_k}\nabla\lambda_1\cdot\nabla\lambda_2\mathrm{d}x\leqslant 0,$$

对于 λ_2,λ_3，以及 λ_3,λ_1 也一样。因此(4.2)成立。▌

引理4.2 设条件(C)，(D)成立。$w\in S(\Omega_0)$，a 为常数，$w_a\in S(\Omega_0)$ 由下式确定：

$$w_a(b_i)=\min\{a,w(b_i)\},\quad i=1,2,\cdots, \tag{4.3}$$

则 $v_a = w - w_a \in S(\Omega_0)$ 满足

$$a(v_a, v_a) \leqslant a(w, v_a). \tag{4.4}$$

证明 因为

$$a(w, v_a) = a(v_a, v_a) + a(w_a, v_a),$$

所以只要证明

$$a(w_a, v_a) \geqslant 0.$$

又因为

$$a(a, v_a) = 0,$$

所以只要证明

$$a(a - w_a, v_a) \leqslant 0. \tag{4.5}$$

由条件(C)，任给 $\varepsilon > 0$，可以取有限和逼近 $a - w_a$ 与 v_a 如下：

$$\left\| (a - w_a) - \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i \right\|_{1, \Omega_0} < \varepsilon,$$

$$\left\| v_a - \sum_{j=1}^{M} d_j \varphi_j \right\|_{1, \Omega_0} < \varepsilon.$$

因为 $a - w_a \geqslant 0, v_a \geqslant 0, \varphi_i \geqslant 0$，而且 c_i, d_i 都是节点值，所以总可以使 $c_i \geqslant 0, d_i \geqslant 0$。由引理4.1

$$a\left(\sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i, \sum_{j=1}^{M} d_j \varphi_j \right) = \sum_{i,j} a_{ij} c_i d_j \leqslant 0.$$

但是 ε 是任意的，于是就有(4.5)。 ▎

引理4.3 任给 $p \geqslant 1$ 及三角形单元 e_i，设 $w \in P_1(e_i)$，则有

$$\sum_{j=1}^{3} |w(b_j)|^p \operatorname{mease}_i \leqslant C \|w\|_{0,p,e_i}^p, \tag{4.6}$$

其中 b_1, b_2, b_3 是 e_i 的顶点。

证明 作仿射变换 $x = F(y)$，将 e_i 变为

$$\{y = (y_1, y_2) \in \boldsymbol{R}^2; 0 < y_1 < 1, 0 < y_2 < 1 - y_1\}.$$

令 $\hat{w}(y) = w(F(y))$，则

$$\|w\|_{0,p,e_i}^p=\int_{e_i}|w(x)|^p\mathrm{d}\,x$$

$$=2\text{meas}\,e_i\int_0^1\int_0^{1-y_1}|\hat{w}(y)|^p\mathrm{d}y_2\,\mathrm{d}y_1.$$

不妨设$|\hat{w}(0)|$为最大绝对值，则在三角形

$$\hat{e}=\left\{y\in\boldsymbol{R}^2;0<y_1<\frac{1}{2},0<y_2<\frac{1}{2}-y_1\right\}$$

上$\hat{w}(y)$与$\hat{w}(0)$同号。作$\hat{e}$上的线性函数λ_0,使

$$\lambda_0(0,0)=1,\quad \lambda_0\left(\frac{1}{2},0\right)=\lambda_0\left(0,\frac{1}{2}\right)=0,$$

则在$\hat{e}$上$|\hat{w}(y)|\geqslant|\hat{w}(0)\lambda_0(y)|$。于是

$$\|w\|_{0,p,e_i}^p\geqslant 2\text{meas}\,e_i\int_{\hat{e}}|\hat{w}(0)\lambda_0(y)|^p\,\mathrm{d}y$$

$$\geqslant\frac{\text{meas}\,e_i}{C}|\hat{w}(0)|^p,$$

即有

$$|\hat{w}(0)|^p\,\text{meas}\,e_i\leqslant C\|w\|_{0,p,e_i}^p.$$

注意到$|\hat{w}(0)|$是最大绝对值，即有(4.6)。 ▎

引理4.4 设$\varphi(t)$是定义于$[a_0,+\infty)$的非负不增函数，并且存在常数$C>0,\gamma>0,s>1$,使当$\beta>a\geqslant a_0$时，

$$\varphi(\beta)\leqslant\frac{C}{(\beta-a)^\gamma}(\varphi(a))^s,\tag{4.7}$$

则

$$\varphi(a_0+d)=0,$$

其中

$$d^\gamma=C(\varphi(a_0))^{s-1}2^{\frac{\gamma s}{s-1}}.$$

证明 任取$a\in[a_0,+\infty)$,取β满足$\beta>a$而且

$$(\beta-\alpha)^{\gamma} \geqslant C 2^{\frac{\gamma}{s-1}}(\varphi(\alpha))^{s-1},$$

则由(4.7)，

$$\varphi(\beta) \leqslant 2^{-\frac{\gamma}{s-1}} \varphi(\alpha). \tag{4.8}$$

作递增序列 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n, \cdots$，满足递推关系

$$(\alpha_n-\alpha_{n-1})^{\gamma} = C 2^{\frac{\gamma}{s-1}}(\varphi(\alpha_{n-1}))^{s-1},$$

则有

$$(\alpha_n-\alpha_{n-1})^{\gamma} \leqslant C 2^{\frac{\gamma}{s-1}}(2^{-\frac{\gamma}{s-1}} \varphi(\alpha_{n-2}))^{s-1}$$
$$=2^{-\gamma}(\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2})^{\gamma},$$

即

$$\alpha_n-\alpha_{n-1}=\frac{1}{2}(\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2}). \tag{4.9}$$

令 $n \rightarrow \infty$，由(4.8)得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\alpha_n)=0.$$

由(4.9)得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n=\alpha_0+2(\alpha_1-\alpha_0)=\alpha_0+d. \quad \|$$

下面我们证明极值原理及解的一致收敛性.

定理4.1 设条件(C)，(D)成立，u_0^I 在 $\partial \Omega_0$ 上连续，则问题(3.2)$_1$ 的解 u_h 必在边界 $\partial \Omega_0$ 上取到它的最大值与最小值.

证明 令 $\alpha=\max\limits_{x \in \partial \Omega_0} u_0^I(x)$，$w_\alpha \in S(\Omega_0)$ 满足

$$w_\alpha(b_i)=\min\{\alpha, u_h(b_i)\}, \quad i=1,2, \cdots,$$

并且令 $v_\alpha=u_h-w_\alpha$. 则由引理4.2，

$$a(v_\alpha, v_\alpha) \leqslant a(u_h, v_\alpha).$$

在边界 $\partial \Omega_0$ 上 $w_\alpha=u_h$，因此 $v_\alpha \in S_0(\Omega_0)$. 由(3.2)$_1$，

$$a(v_\alpha, v_\alpha) \leqslant 0.$$

于是 $v_\alpha=0$，即 $w_\alpha=u_h$，即

$$u_h(x)\leqslant a,\quad \forall x\in\Omega_0.$$

同理可得 u_h 的下界。 ▎

推论 在定理4.1的假设下，转移矩阵 $X=(x_{ij})$ 满足

$$x_{ij}\geqslant 0,\quad \forall i,j=1,2,\cdots,n.$$

证明 设不然，如果有一个 $x_{ij}<0$，总可以适当取边值 $u_0^I\geqslant 0$，使得 u_h 在一个节点上取负值，与定理 4.1 矛盾。 ▎

定理4.2 设条件(A)，(B)，(C)，(D)成立，u 为问题 (3.1) 的解，u_h 为问题$(3.2)_1$ 的解，其中 $u_0^I=\Pi u_0$。

(a) 如果 $u\in W^{1,p}(\Omega_0)$，$2<p<\dfrac{2}{1-\dfrac{\pi}{\alpha}}$，则

$$\lim_{h\to 0}\|u-u_h\|_{0,\infty,\Omega_0}=0.\tag{4.10}$$

(b) 如果 $u\in W^{2,p(\sigma)}(\Omega_0)$，

$$2<p<\frac{2}{1-\dfrac{\pi}{\alpha}},\quad 0\leqslant\sigma<2-\left(1-\frac{\pi}{\alpha}\right)p,$$

则

$$\|u-u_h\|_{0,\infty,\Omega_0}\leqslant Ch\|u\|_{2,p(\sigma),\Omega_0}.\tag{4.11}$$

证明 由嵌入定理[50]，$W^{1,p}(\Omega_0)\to C(\bar{\Omega}_0)$，由定理 2.1，

$$W^{2,p(\sigma)}(\Omega_0)\to C(\bar{\Omega}_0),$$

因此插值函数 Πu 是有意义的。由(3.1)，$(3.2)_1$，

$$a(u_h-\Pi u,v)=a(u-\Pi u,v),\quad \forall v\in S_0(\Omega_0).$$

记 $w=u_h-\Pi u\in S_0(\Omega_0)$，

$$f_i=\frac{\partial(u-\Pi u)}{\partial x_i},\quad i=1,2,$$

则有

$$a(w,v)=\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_0}f_i\frac{\partial v}{\partial x_i}\mathrm{d}x.$$

任取 $a\geqslant 0$,作 $w_a\in S_0(\Omega_0)$,满足

$$w_a(b_i)=\min\{a,w(b_i)\},\quad i=1,2,\cdots.$$

则由引理 4.2,$v_a=w-w_a$ 满足

$$a(v_a,v_a)\leqslant a(w,v_a)=\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_0}f_i\frac{\partial v_a}{\partial x_i}\mathrm{d}x.$$

取常数 q,使 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,由 Hölder 不等式得

$$a(v_a,v_a)\leqslant\sum_{i=1}^{2}\|f_i\|_{0,p,\Omega_0}\left\|\frac{\partial v_a}{\partial x_i}\right\|_{0,q,\Omega_0}.\qquad(4.12)$$

令 $E(a)=\{x\in\Omega_0;\ v_a(x)>0\}$.注意到 $v_a\geqslant 0$,所以 $\overline{E(a)}$ 是一些三角形单元的并集，在 $\Omega_0\backslash\overline{E(a)}$ 内,$v_a=0$。利用 Hölder 不等式得

$$\left\|\frac{\partial v_a}{\partial x_i}\right\|_{0,q,\Omega_0}=\left\|\frac{\partial v_a}{\partial x_i}\right\|_{0,q,E(a)}$$

$$\leqslant\left\|\frac{\partial v_a}{\partial x_i}\right\|_{0,E(a)}(\text{meas }E(a))^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant|v_a|_{1,\Omega_0}(\text{meas }E(a))^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}.$$

代入(4.12)得

$$|v_a|_{1,\Omega_0}^2\leqslant\sum_{i=1}^{2}\|f_i\|_{0,p,\Omega_0}|v_a|_{1,\Omega_0}(\text{meas }E(a))^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}.$$

取 $\gamma>\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)^{-1}$,由嵌入定理,$H^1(\Omega_0)\to L^\gamma(\Omega_0)$,即有

$$\|v_a\|_{0,\gamma,\Omega_0}\leqslant C\|v_a\|_{1,\Omega_0}.$$

注意到 $v_a\in S_0(\Omega_0)$,由 Friedrichs 不等式得

$$\|v_a\|_{0,\gamma,\Omega_0}\leqslant C|v_a|_{1,\Omega_0}.$$

因此

$$\|v_a\|_{0,\gamma,\Omega_0} \leqslant \sum_{i=1}^{2} \|f_i\|_{0,p,\Omega_0} (\text{meas } E(a))^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}.$$

现在设 $\beta > a$ 为另一实数. 象 $E(a)$ 一样, 可以定义 $E(\beta)$. 利用引理 4.3 有

$$\|v_a\|_{0,\gamma,\Omega_0}^{\gamma} = \sum_{e_i \subset \overline{E(a)}} \int_{e_i} (v_a(x))^{\gamma} \mathrm{d}x$$

$$\geqslant \frac{1}{C} \sum_{b_i \in \overline{E(a)}} (v_a(b_i))^{\gamma} \text{meas}(\text{supp } \varphi_i)$$

$$\geqslant \frac{1}{C} \sum_{b_i \in E(\beta)} (v_a(b_i))^{\gamma} \text{meas}(\text{supp } \varphi_i)$$

$$\geqslant \frac{1}{C} (\beta - a)^{\gamma} \sum_{b_i \in E(\beta)} \text{meas}(\text{supp } \varphi_i)$$

$$\geqslant \frac{1}{C} (\beta - a)^{\gamma} \text{meas } E(\beta).$$

令

$$C_1 = C\left(\sum_{i=1}^{2} \|f_i\|_{0,p,\Omega_0}\right)^{\gamma},$$

$$s = \gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) > 1,$$

$$\varphi(t) = \text{meas } E(t),$$

则有

$$\varphi(\beta) \leqslant \frac{C_1}{(\beta - a)^{\gamma}} (\varphi(a))^{s}.$$

由引理 4.4, $\varphi(\bar{a}) = 0$, 其中

$$\bar{a} = 2^{\frac{s}{s-1}} [C_1 (\varphi(0))^{s-1}]^{\frac{1}{\gamma}}.$$

由 $\varphi(t)$ 的定义，

$$v_{\tilde{a}}(x)=0, \quad \forall x\in\Omega_0,$$

即

$$w_{\tilde{a}}(b_i)=\min\{\tilde{a}, w(b_i)\}=w(b_i),$$

所以

$$w(b_i)\leqslant\tilde{a}\leqslant C\sum_{i=1}^{2}\|f_i\|_{0,p,\Omega_0}.$$

因为 w 是分片线性函数，所以

$$w(x)\leqslant C\sum_{i=1}^{2}\|f_i\|_{0,p,\Omega_0}, \quad \forall x\in\Omega_0.$$

对 $-w$ 作同样的论证，最后得

$$\|w\|_{0,\infty,\Omega_0}\leqslant C\sum_{i=1}^{2}\|f_i\|_{0,p,\Omega_0},$$

即

$$\|u_h-\Pi u\|_{0,\infty,\Omega_0}\leqslant C|u-\Pi u|_{1,p,\Omega_0}.$$

利用嵌入定理得

$$\begin{aligned}\|u-u_h\|_{0,\infty,\Omega_0}&\leqslant\|u-\Pi u\|_{0,\infty,\Omega_0}+\|\Pi u-u_h\|_{0,\infty,\Omega_0}\\&\leqslant C\|u-\Pi u\|_{1,p,\Omega_0}.\end{aligned}$$

由定理 2.2,定理 2.3 即得(4.10)与(4.11). ∎

§5 一个超收敛估计

从本节开始，我们假设剖分在 O 点附近是相似的. 按照第一章中所叙述的方式，区域 Ω_0 被分割为多边形区域 Ω^* 与 Ω. 在 Ω^* 中作常规的有限剖分. $O\in\bar{\Omega}$, 区域 Ω 关于 O 点是星形的，并且除 O 点外，其余内角都小于 π. 取一个常数 $\xi\in(0,1)$, 以 O 点为相似中心，以 $\xi,\xi^2,\cdots,\xi^k,\cdots$ 为比例常数，作 $\partial\Omega$ 的相似形. 两个多

边形之间为一“层”。过O点作有限条射线进一步将每一层剖分为有限个四边形，再将每个四边形剖分成两个三角形。每层的剖分方式为一致。在此剖分下，条件(B)是自然成立的。以h_k记第k层单元的最大直径，则

$$h_1 \leqslant h, \quad h_k = \xi^{k-1} h_1.$$

在本节，我们假设Ω上的剖分更特殊一些，即剖分满足如下条件：

(E) Ω被有限条射线分割为三角形区域$D_1, D_2, \cdots, D_M$(图24)。在不断细分的过程中，$D_1, D_2, \cdots, D_M$不变。每个区域D_i上的三角形剖分按同一方向进行，并且线段AB上的子线段的长度的差为$O(h^2)$(图25)。

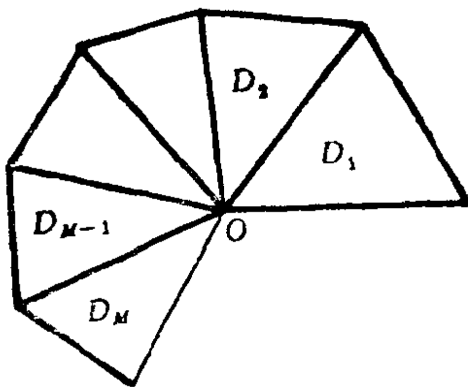


图 24

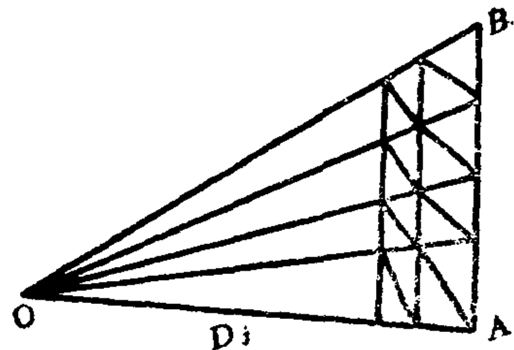


图 25

为简单起见，设$\Omega = \Omega_0$。对于一般情形，在Ω^*上的有限元方法的超收敛性已有较为完整的理论，例如读者可以参看[49]。

先引进一些记号。设过O点的射线将区域D_i分割为m个“子三角形”(图25)，记它们为$K_1, \cdots, K_m$，又记D_i的第k层为T_k，则有

$$\bar{D}_i = \bigcup_{i=1}^{m} \bar{K}_i = \bigcup_{k=1} \bar{T}_k.$$

设 $e=\triangle b_1b_2b_3$，$e'=\triangle b_2b_4b_3$ 为 $T_k\cup T_{k+1}$ 上的任意两个三角

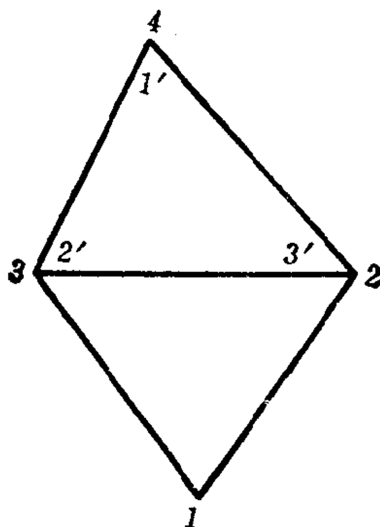


图 26

形单元(图26)。以 $(x_1^{(i)},x_2^{(i)})$ 记点 b_i 的坐标。在 e 上令

$$\xi_1=x_1^{(2)}-x_1^{(3)},\quad \xi_2=x_1^{(3)}-x_1^{(1)},\quad \xi_3=x_1^{(1)}-x_1^{(2)},$$

$$\eta_1=x_2^{(2)}-x_2^{(3)},\quad \eta_2=x_2^{(3)}-x_2^{(1)},\quad \eta_3=x_2^{(1)}-x_2^{(2)},$$

$$\delta^2x_1=x_1^{(1)}-x_1^{(2)}-x_1^{(3)}+x_1^{(4)},\quad \delta^2x_2=x_2^{(1)}-x_2^{(2)}-x_2^{(3)}+x_2^{(4)},$$

$$S=\text{meas}\ e.$$

在单元 e' 上的节点局部编号设为 $1',2',3'$，其几何参数可以用 e 的表示为

$$\xi'_1=-\xi_1,\quad \xi'_2=-\xi_2-\delta^2x_1,\quad \xi'_3=-\xi_3+\delta^2x_1,$$

$$\eta'_1=-\eta_1,\quad \eta'_2=-\eta_2-\delta^2x_2,\quad \eta'_3=-\eta_3+\delta^2x_2.$$

又记 $S'=\text{meas}\ e'$。

我们先证明一些辅助的引理[49]。

引理5.1 设条件(A)，(E)成立，则 $e\cup e'$ 构成一个"近似平行四边形"．即

$$|\overrightarrow{b_1b_2}-\overrightarrow{b_3b_4}|+|\overrightarrow{b_1b_3}-\overrightarrow{b_2b_4}|\leqslant C\xi^kh^2, \tag{5.1}$$

$$|\delta^2x_1|+|\delta^2x_2|\leqslant C\xi^kh^2, \tag{5.2}$$

$$|S'-S|\leqslant C(S+S')h. \tag{5.3}$$

证明 如图27，由条件(E)可得

$$|\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{EF}|\leqslant\xi^kCh^2=C\xi^kh^2. \tag{5.4}$$

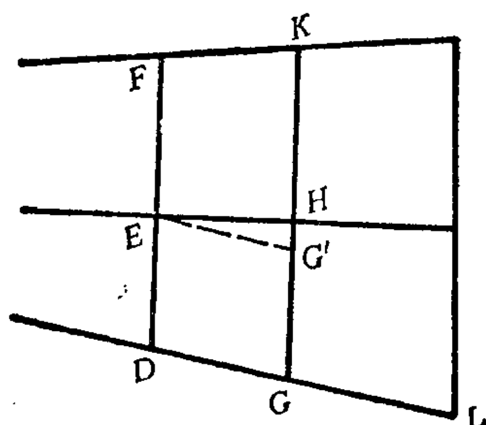


图 27

由相似参数 ξ 的取法可知

$$|\overrightarrow{GL}-\overrightarrow{DG}|=(1-\xi)|\overrightarrow{GL}|.$$

从图 25 可以看出

$$(1-\xi)|\overrightarrow{OA}|\leqslant h,$$

因此

$$|\overrightarrow{GL}-\overrightarrow{DG}|\leqslant Ch|\overrightarrow{GL}|\leqslant C\xi^{k}h^{2}. \tag{5.5}$$

过 E 点作 DG 的平行线 EG'，则有

$$|\overrightarrow{DG}-\overrightarrow{EH}|=|\overrightarrow{EG'}-\overrightarrow{EH}|=|\overrightarrow{HG'}|.$$

$\triangle OGH$ 与 $\triangle EG'H$ 相似，故有

$$|\overrightarrow{HG'}|=(1-\xi)|\overrightarrow{GH}|\leqslant(1-\xi)\xi^{k}h,$$

即有

$$|\overrightarrow{DG}-\overrightarrow{EH}|\leqslant C\xi^{k}h^{2}. \tag{5.6}$$

又

$$|\overrightarrow{GH}-\overrightarrow{DE}|=|\overrightarrow{HG'}|\leqslant C\xi^k h^2. \qquad (5.7)$$

有了(5.4)—(5.7)这四个基本估计后，各四边形的对边差均可以估计。例如

$$\overrightarrow{DH}-\overrightarrow{EK}=\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{HK}=(\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{EF})+(\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{HK}).$$

于是(5.1),(5.2)得证。又有

$$S'-S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\xi_1 & \eta_1\\ \delta^2 x_1 & \delta^2 x_2\end{vmatrix},$$

由条件(A),

$$|\xi_1|+|\eta_1|\leqslant CS^{1/2}, \quad S\leqslant C\xi^{2k}h^2,$$

注意到(5.2)即得(5.3)。 ∎

以Q表示图26所示的四边形区域。设$v\in C(Q)$,并且v在e, e'上均为线性函数。以$v^{(1)},v^{(2)},v^{(3)},v^{(4)}$记$v$在各节点上的值,以$\partial_i v,\partial'_i v,i=1,2$分别记$v$在$e,e'$上的一阶微商，并且记

$$\delta^2 v=v^{(1)}-v^{(2)}-v^{(3)}+v^{(4)}.$$

引理5.2 设条件(A),(E)成立,$v\in S(\Omega)$，则

$$\partial'_1 v-\partial_1 v=-\eta_1\frac{\delta^2 v}{S+S'}+O(\xi^{-k})|v|_{1,Q}, \qquad (5.8)$$

$$\partial'_2 v-\partial_2 v=\xi_1\frac{\delta^2 v}{S+S'}+O(\xi^{-k})|v|_{1,Q}. \qquad (5.9)$$

证明 在e上,

$$2S\partial_1 v=\eta_2(v^{(2)}-v^{(1)})+\eta_3(v^{(3)}-v^{(1)}),$$

$$-2S\partial_2 v=\xi_2(v^{(2)}-v^{(1)})+\xi_3(v^{(3)}-v^{(1)}),$$

$$v^{(i)}-v^{(j)}=(x_1^{(i)}-x_1^{(j)})\partial_1 v+(x_2^{(i)}-x_2^{(j)})\partial_2 v, \quad 1\leqslant i,j\leqslant 3.$$

因此

$$|v^{(i)}-v^{(j)}|\leqslant\xi^k h|\nabla v|\leqslant C|v|_{1,e}. \qquad (5.10)$$

在e'上类似地有

$$2S'\partial'_1 v=-\eta_2(v^{(3)}-v^{(4)})-\eta_3(v^{(2)}-v^{(4)})+\delta^2 x_2(v^{(2)}-v^{(3)}),$$

$$-2S'\partial'_2 v = -\xi_2(v^{(3)} - v^{(4)}) - \xi_3(v^{(2)} - v^{(4)}) + \delta^2 x_1(v^{(2)} - v^{(3)}).$$

相减得

$$2S'\partial'_1 v - 2S\partial_1 v = \eta_2\delta^2 v + \eta_3\delta^2 v + \delta^2 x_2(v^{(2)} - v^{(3)})$$
$$= -\eta_1\delta^2 v + \delta^2 x_2(v^{(2)} - v^{(3)}),$$

即有

$$(S + S')(\partial'_1 v - \partial_1 v)$$
$$= -\eta_1\delta^2 v + \delta^2 x_2(v^{(2)} - v^{(3)}) - (S' - S)(\partial'_1 v + \partial_1 v),$$

即

$$\partial'_1 v - \partial_1 v = -\eta_1\frac{\delta^2 v}{S + S'} + \delta^2 x_2 \frac{v^{(2)} - v^{(3)}}{S + S'} - \frac{S' - S}{S + S'}(\partial'_1 v + \partial_1 v).$$

注意到

$$|\partial'_1 v + \partial_1 v| \leqslant C(\xi^{-k}h^{-1})|v|_{1,\omega},$$

由引理 5.1 及(5.10)式即得(5.8)式。(5.9)的证明是同样的。 ▌

引理5.3 设条件(A),(E)成立，当 $f \in H^1(Q)$，有

$$\left|\int_{b_1 b_2} f(x)\mathrm{d}x_1 - \int_{b_3 b_4} f(x)\mathrm{d}x_1\right| \leqslant C\int_Q\left(|\nabla f| + \frac{1}{r}|f|\right)\mathrm{d}x,$$

其中线积分可以换 $\mathrm{d}x_1$ 为 $\mathrm{d}x_2$。

证明 作双线性变换，将 Q 变为正方形

$$\{\zeta = (\zeta_1, \zeta_2);\ -1 < \zeta_1, \zeta_2 < 1\}.$$

则由条件(A),(E)以及引理 5.1，

$$\det\frac{\partial x}{\partial\zeta} \geqslant \frac{1}{C}\xi^{2k}h^2,$$

$$\left|\frac{\partial x_i}{\partial\zeta_j}\right| \leqslant C\xi^k h, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant 2,$$

$$\left|\frac{\partial^2 x_i}{\partial\zeta_1\partial\zeta_2}\right| \leqslant C\xi^k h^2, \quad i = 1, 2.$$

因此

$$\left|\int_{b_1 b_2} f(x)\mathrm{d}x_1 - \int_{b_3 b_4} f(x)\mathrm{d}x_1\right|$$

$$= \left|\int_{-1}^{1} \left(f(x(\zeta))\frac{\partial x_1}{\partial \zeta_1}\right|_{\zeta_2=-1}^{\zeta_2=1} \mathrm{d}\zeta_1\right|$$

$$\leqslant \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left|\frac{\partial}{\partial \zeta_2}\left(f(x(\zeta))\frac{\partial x_1}{\partial \zeta_1}\right)\right|\mathrm{d}\zeta$$

$$\leqslant C\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(\xi^{2k}h^2|\nabla f| + \xi^k h^2|f|)\mathrm{d}\zeta$$

$$\leqslant C\int_Q\left(|\nabla f| + \frac{|f|}{\xi^k}\right)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\int_Q\left(|\nabla f| + \frac{|f|}{r}\right)\mathrm{d}x. \quad \blacksquare$$

在单元 e_i 上，以 h_i 表示直径，则有

引理5.4 设条件(A)成立，$u\in H^3(e_i)$，插值算子 Π：$C(\bar{e}_i)\to P_1(e_i)$，则

$$u(x) - \Pi u(x) = \sum_{i=1}^{3} R_i(x) + \bar{R}(x),$$

$$R_i(x) = -\frac{1}{2}(\xi_i^2\partial_1^2 u + 2\xi_i\eta_i\partial_1\partial_2 u + \eta_i^2\partial_2^2 u)\ \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{\lambda_i},$$

$$\bar{R}(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 t\sum_{i=1}^{3}\lambda_i D_i^3 u(tx + (1-t)b_i)\mathrm{d}t,$$

其中

$$\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad k = 1,2,$$

$$D_j = (x_1 - x_1^{(j)})\partial_1 + (x_2 - x_2^{(j)})\partial_2, \quad j = 1,2,3,$$

而且有估计

$$\|R_j\|_{0,e_i}+h_i|R_j|_{1,e_i}\leqslant Ch_i^2\|u\|_{3,e_i},$$

$$\|\bar{R}\|_{0,e_i}+h_i|\bar{R}|_{1,e_i}\leqslant Ch_i^3\|u\|_{3,e_i}.$$

本引理可以用带积分余项的 Taylor 公式证明（例如可参看[52]）。

类似于 $S(\Omega_0)$，可以定义无限元空间 $S(D_j)$（见图 25）。令

$$S_0(D_j)=\{u\in S(D_j);u|_{AB}=0\},$$

并且令

$$a(u,v)_{D_j}=\int_{D_j}\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x,$$

则有如下的基本引理：

引理5.5　设条件(A)，(E)成立，$u\in H^{4(\sigma)}(D_j)$，插值算子 Π：$C(\bar{D}_j)\to S(D_j)$，则当 $0<h\leqslant\frac{1}{2}$时，

$$|a(u-\Pi u,v)_{D_j}|\leqslant Ch^2|\log h|^\gamma\|u\|_{4(\sigma),D_j}|v|_{1,D_j},\quad (5.11)$$

$$\forall v\in S_0(D_j),$$

其中当 $\alpha<2\pi$ 时，

$$1<\sigma<\frac{2\pi}{\alpha},\quad \gamma=\frac{1}{2};$$

当 $\alpha=2\pi$ 时，

$$0<\sigma<1,\quad \gamma=1.$$

证明　为书写方便，略去 D_j的下标 j，由引理5.4，

$$a(u-\Pi u,v)_D=\sum_{i=1}^{3}A_i+a(\bar{R},v)_D,$$

其中 $A_i=a(R_i,v)_D$。估计分四步进行。

第一步：$a(\bar{R},v)_D$的估计。

由引理5.4，

$$|a\bar{R},v)_D| \leqslant \sum_{e_i \subset D} \|\nabla \bar{R}\|_{0,e_i} |v|_{1,e_i}$$

$$\leqslant \sum_{e_i \subset D} C h_i^2 \|u\|_{3,e_i} |v|_{1,e_i}.$$

由相似性，当 $e_i \subset T_k$ 时，有

$$h_i \leqslant h\xi^{k-1}, \qquad \xi^k \leqslant Cr,$$

因此

$$|a(\bar{R},v)_D| \leqslant \sum_{e_i \subset D} C h^2 \|u\|_{3(\sigma),e_i} |v|_{1,e_i}$$

$$\leqslant C h^2 \|u\|_{3(\sigma),D} |v|_{1,D}.$$

第二步：A_1的估计。

任取 $K_i \subset D$，令

$$A_{1i} = a(R_1, v)_{K_i},$$

如图28。将 K_i各单元及节点编号，则由 Green 公式，

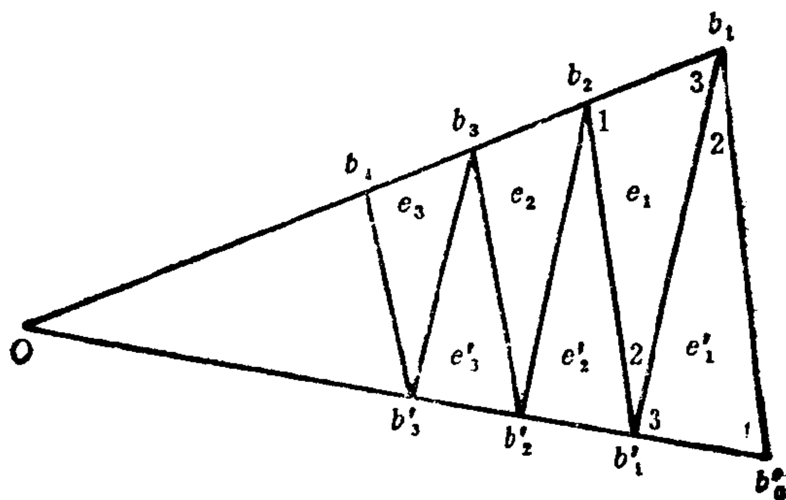


图 28

$$A_{1i} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\oint_{\partial e_k} + \oint_{\partial e'_k} \right) R_i (\partial_1 v \mathrm{d} x_2 - \partial_2 v \mathrm{d} x_1).$$

R_1仅在 $b_kb'_k$，$k=1,2,\cdots$上不等于零，而在此公共边上

$$\lambda'_2=\lambda_3,\qquad \xi'_1=-\xi_1,\qquad \eta'_1=-\eta_1,\qquad R'_1=R_1,$$

于是由引理 5.2 得

$$A_{1i}=B_1+B_2,$$

其中

$$B_1=\sum_{k=1}^{\infty}O(\xi^{-k})|v|_{1,e_k\cup e'_k}\int_{b_kb'_k}|R_1|\mathrm{d}s, \tag{5.12}$$

$$B_2=-\sum_{k=1}^{\infty}\delta^2 v\int_{b_kb'_k}\frac{R_1}{S_k+S'_k}(\eta_1\mathrm{d}x_2+\xi_1\mathrm{d}x_1), \tag{5.13}$$

其中 S_k与 S'_k 分别是三角形 e_k与 e'_k 的面积.

先估计 B_1。由引理5.4 与定理1.1的推论，

$$\begin{aligned}
&\int_{b_kb'_k}|R_1|\mathrm{d}s\\
&\leqslant Ch_k^{\frac{5}{2}}\Big(\int_{b_kb'_k}|\partial^2u|^2\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant Ch_k^{\frac{5}{2}}\xi^{\frac{\sigma-4}{2}k}\Big(\int_{b_kb'_k}|r^{\frac{4-\sigma}{2}}\partial^2u|^2\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant Ch_k^{\frac{5}{2}}\xi^{\frac{\sigma-4}{2}k}h_k^{\frac{1}{2}}|\log h_k|^{\frac{1}{2}}\|u\|_{3(\sigma),D}\\
&\leqslant Ch^3\xi^{\frac{2+\sigma}{2}k}|\log h_k|^{\frac{1}{2}}\|u\|_{3(\sigma),D}.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

对于任意的常数 $\delta>0$,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\xi^{\delta k}|\log h_k|=\sum_{k=1}^{\infty}\xi^{\delta k}|\log h|+\sum_{k=1}^{\infty}\xi^{\delta k}k|\log\xi|.$$

容易看出,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\xi^{\delta k}=\frac{\xi^\delta}{1-\xi^\delta}=O(h^{-1}),$$

$$\sum_{k=1}\xi^{\delta k}k=O(h^{-1}),$$

因此

$$\sum_{k=1}^{\infty}\xi^{\delta k}|\log h_k|\leqslant Ch^{-1}|\log h|. \qquad (5.15)$$

将(5.14),(5.15) 式代入 (5.12) 得

$$|B_1|\leqslant Ch^3\|u\|_{3(\sigma),D}\sum_{k=1}^{\infty}|v|_{1,e_k\cup e'_k}\xi^{\frac{\sigma}{2}k}|\log h_k|^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant Ch^3\|u\|_{3(\sigma),D}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|v|^2_{1,e_k\cup e'_k}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\xi^{\sigma k}|\log h_k|\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant Ch^{\frac{5}{2}}|\log h|^{\frac{1}{2}}\|u\|_{3(\sigma),D}\ |v|_{1,K_i}.$$

为估计 B_2，记

$$f_k=\frac{R_1}{S_k+S'_k}(\eta_1\mathrm{d}x_2+\xi_1\mathrm{d}x_1)|_{b_k b'_k},$$

则

$$B_2=-\sum_{k=1}^{\infty}(v(b_{k+1})-v(b'_k)-v(b_k)+v(b'_{k-1}))\int_{b_k b'_k}f_k$$

$$=(v(b_1)-v(b'_0))\int_{b_1 b'_1}f_1$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}(v(b_{k+1})-v(b'_k))\left(\int_{b_{k+1}b'_{k+1}}f_{k+1}-\int_{b_k b'_k}f_k\right).$$

因为 $v\in S_0(D)$，所以上式右端的第一项等于零。我们估计第二项。

$$\left|\int_{b_{k+1}b'_{k+1}}f_{k+1}-\int_{b_k b'_k}f_k\right|$$

$$=\left|\int_{b_{k+1}b'_{k+1}}\frac{H}{S_{k+1}+S'_{k+1}}(\eta_1\mathrm{d}x_2+\xi_1\mathrm{d}x_1)\right.$$

$$-\int_{b_k b_k'} \frac{H}{S_k + S_k'} (\eta_1 \mathrm{d}x_2 + \xi_1 \mathrm{d}x_1) \Big|,$$

其中，

$$H = \frac{1}{2}(\xi_1^2 \partial_1^2 u + 2\xi_1 \eta_1 \partial_1 \partial_2 u + \eta_1^2 \partial_2^2 u) \lambda_2 \lambda_3.$$

以其中一项为例，由引理5.1，

$$I = \left| \int_{b_{k+1} b_{k+1}'} \frac{\xi_1^3 \partial_1^2 u}{S_{k+1} + S_{k+1}'} \mathrm{d}x_1 - \int_{b_k b_k'} \frac{\xi_1^3 \partial_1^2 u}{S_k + S_k'} \mathrm{d}x_1 \right|$$

$$\leqslant C\xi^k h^2 \int_{b_k b_k'} |\partial_1^2 u| \mathrm{d}s$$

$$+ \left| \frac{\xi_1^3}{S_{k+1} + S_{k+1}'} \left(\int_{b_{k+1} b_{k+1}'} \partial_1^2 u \mathrm{d}x_1 - \int_{b_k b_k'} \partial_1^2 u \mathrm{d}x_1 \right) \right|.$$

由引理5.3，

$$I \leqslant C\xi^k h^2 \int_{b_k b_k'} |\partial_1^2 u| \mathrm{d}s + C\xi^k h \int_{e_k \cup e_{k+1}'} \left(|\partial^3 u| + \frac{|\partial^2 u|}{r} \right) \mathrm{d}x.$$

其余各项同理，于是

$$\left| \int_{b_{k+1} b_{k+1}'} f_{k+1} - \int_{b_k b_k'} f_k \right|$$

$$\leqslant C\xi^k h^2 \int_{b_k b_k'} |\partial^2 u| \mathrm{d}s + C\xi^k h \int_{e_k \cup e_{k+1}'} \left(|\partial^3 u| + \frac{|\partial^2 u|}{r} \right) \mathrm{d}x.$$

类似于（5.14）式可得

$$\xi^k h^2 \int_{b_k b_k'} |\partial^2 u| \mathrm{d}s \leqslant C h^3 \xi^{\frac{\sigma}{2} k} |\log h_k|^{\frac{1}{2}} \|u\|_{3(\sigma), D}.$$

而

$$\xi^k h \int_{e_k \cup e_{k+1}'} \left(|\partial^3 u| + \frac{|\partial^2 u|}{r} \right) \mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\xi^{2k}h^2\xi^{-\frac{4-\sigma}{2}k}\left(\int_{e_k\cup e'_{k+1}}(r^{4-\sigma}|\partial^3u|^2+r^{2-\sigma}|\partial^2u|^2)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant Ch^2\xi^{\frac{\sigma}{2}k}\|u\|_{3(\sigma),\,e_k\cup e'_{k+1}}.$$

于是

$$|B_2|\leqslant Ch^3\|u\|_{3(\sigma),D}\sum_{k=1}^{\infty}\xi^{\frac{\sigma}{2}k}|\log h_k|^{\frac{1}{2}}|v|_{1,e_k\cup e'_k}$$

$$+Ch^2\sum_{k=1}^{\infty}\xi^{\frac{\sigma}{2}k}\|u\|_{3(\sigma),\,e_k\cup e'_{k+1}}|v|_{1,e_k\cup e'_k}$$

$$\leqslant Ch^{\frac{5}{2}}|\log h|^{\frac{1}{2}}\|u\|_{3(\sigma),D}|v|_{1,K_i}$$

$$+Ch^2\|u\|_{3(\sigma),\,K_i}|v|_{1,K_i}. \tag{5.16}$$

综合各式得

$$|A_1|\leqslant\sum_{i=1}^{m}|A_{1i}|$$

$$\leqslant Ch^{\frac{5}{2}}|\log h|^{\frac{1}{2}}\|u\|_{3(\sigma),D}\sum_{i=1}^{m}|v|_{1,K_i}$$

$$+Ch^2\sum_{i=1}^{m}\|u\|_{3(\sigma),K_i}|v|_{1,K_i}$$

$$\leqslant Ch^2|\log h|^{\frac{1}{2}}\|u\|_{3(\sigma),D}|v|_{1,D}.$$

第三步：A_2的估计。

图29所示为第 k 层 T_k的图形以及约定的一些记号，则

$$A_2=\sum_{k=1}^{\infty}A_{2,k},$$

$$A_{2,k}=a(R_2,v)_{T_k}.$$

象第二步一样，由 Green 公式

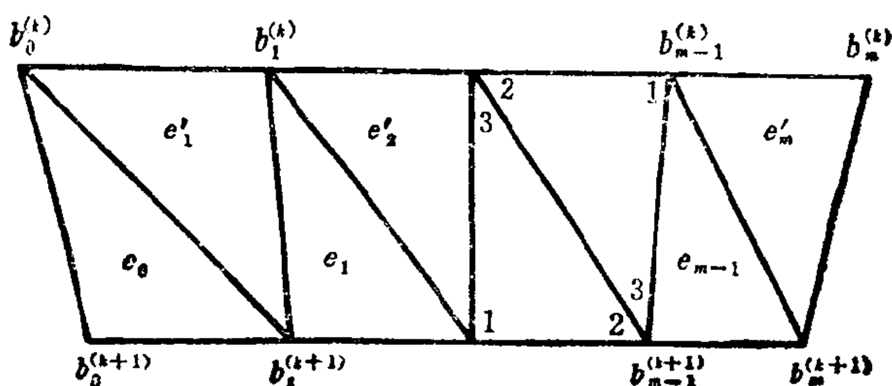


图 29

$$A_{2,k}=\oint_{\partial e_0} R_2\left(\partial_1 v \mathrm{d} x_2-\partial_2 v \mathrm{d} x_1\right)+\oint_{\partial e'_m} R_2\left(\partial_1 v \mathrm{d} x_2-\partial_2 v \mathrm{d} x_1\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{m-1}\left(\oint_{\partial e_i}+\oint_{\partial e'_i}\right) R_2\left(\partial_1 v \mathrm{d} x_2-\partial_2 v \mathrm{d} x_1\right).$$

R_2仅在 $b_i^{(k+1)} b_i^{(k)}$，$i=0,1,\cdots,m$ 上不等于零。于是象第二步一样，可得

$$A_2=U_1+U_2+G_0+G_m,$$

其中

$$U_1=\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m-2}\left(v\left(b_{i+1}^{(k+1)}\right)-v\left(b_i^{(k)}\right)\right)$$

$$\times\left(\int_{b_{i+1}^{(k+1)} b_{i+1}^{(k)}} f_{i+1}-\int_{b_i^{(k+1)} b_i^{(k)}} f_i\right),$$

$$U_2=\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m-2} O\left(\xi^{-k}\right) \int_{b_i^{(k+1)} b_i^{(k)}} R_2|v|_{1, e_i \cup e'_i} \mathrm{d} s,$$

$$G_0=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left(v\left(b_1^{(k+1)}\right)-v\left(b_0^{(k)}\right)\right) \int_{b_1^{(k+1)} b_0^{(k)}} f_1\right.$$

$$+ \oint_{\partial e_0} R_2(\partial_1 v dx_2 - \partial_2 v dx_1) \Big\},$$

$$G_m = \sum_{k=1} \Big\{ (v(b_m^{(k+1)}) - v(b_{m-1}^{(k)})) \int_{b_m^{(k+1)} b_{m-1}^{(k)}} f_{m-1}$$

$$+ \oint_{\partial e'_m} R_2(\partial_1 v dx_2 - \partial_2 v dx_1) \Big\}.$$

象第二步一样可以证明

$$|U_1| + |U_2| \leqslant Ch^2 |\log h|^{\frac{1}{2}} \|u\|_{3(\sigma),D} |v|_{1,D}.$$

余下要估计 G_0, G_m。我们只估计 G_0，G_m 的估计是类似的。在 e_0 上.

$$\begin{aligned} 2S_0 \partial_1 v &= \eta_1 v(b_0^{(k+1)}) + \eta_2 v(b_1^{(k+1)}) + \eta_3 v(b_0^{(k)}) \\ &= \eta_1 (v(b_0^{(k+1)}) - v(b_0^{(k)})) + \eta_2 (v(b_1^{(k+1)}) - v(b_0^{(k)})), \\ -2S_0 \partial_2 v &= \xi_1 v(b_0^{(k+1)}) + \xi_2 v(b_1^{(k+1)}) + \xi_3 v(b_0^{(k)}) \\ &= \xi_1 (v(b_0^{(k+1)}) - v(b_0^{(k)})) + \xi_2 (v(b_1^{(k+1)}) - v(b_0^{(k)})). \end{aligned}$$

于是

$$\oint_{\partial e_0} R_2(\partial_1 v dx_2 - \partial_2 v dx_1)$$

$$= -\frac{v(b_0^{(k+1)}) - v(b_0^{(k)})}{2S_0} \int_{b_0^{(k+1)} b_0^{(k)}} R_2(\eta_1 dx_2 - \xi_1 dx_1)$$

$$-\frac{v(b_1^{(k+1)}) - v(b_0^{(k)})}{2S_0} \int_{b_0^{(k+1)} b_0^{(k)}} R_2(\eta_2 dx_2 - \xi_2 dx_1).$$

又有

$$\int_{b_1^{(k+1)} b_0^{(k)}} f_1 = \frac{1}{S_1 + S'_1} \int_{b_1^{(k+1)} b_1^{(k)}} R_2(\eta_2 dx_2 - \xi_2 dx_1),$$

其中 S_0, S_1, S'_1 分别是 e_0, e_1, e'_1 的面积。类似于(5.16)可得

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}(v(b_1^{(k+1)})-v(b_0^{(k)}))\left\{\frac{1}{2S_0}\int_{b_0^{(k+1)}b_0^{(k)}}R_2(\eta_2\mathrm{d}x_2-\xi_2\mathrm{d}x_1)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{S_1+S_1'}\int_{b_1^{(k+1)}b_1^{(k)}}R_2(\eta_2\mathrm{d}x_2-\xi_2\mathrm{d}x_1)\right\}\right|$$

$$\leqslant Ch^2|\log h|^{\frac{1}{2}}\|u\|_{3(\sigma),D}|v|_{1,D}.$$

因此，剩下要估计的是

$$I=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{v(b_0^{(k+1)})-v(b_0^{(k)})}{2S_0}\int_{b_0^{(k+1)}b_0^{(k)}}R_2(\eta_1\mathrm{d}x_2-\xi_1\mathrm{d}x_1).$$

各线段 $b_0^{(k+1)}b_0^{(k)}$，$k=1,2,\cdots$ 都在同一直线上，不妨设它就是 x_1 轴。于是

$$I=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{v(b_0^{(k+1)})-v(b_0^{(k)})}{S_0}\right.$$

$$\left.\times\int_{b_0^{(k+1)}b_0^{(k)}}(\xi_2^2\partial_1^2u+2\xi_2\eta_2\partial_1\partial_2u+\eta_2^2\partial_2^2u)\lambda_1\lambda_3\xi_1\mathrm{d}x_1\right].$$

我们估计包含 ∂_1^2u 的那一项，其它两项的估计是一样的。注意到

$$\frac{\xi_2^2\xi_1}{S_0}\,\frac{1}{\xi^kh}<C,$$

我们只要估计

$$I_1=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\xi^kx_0}^{\xi^{k-1}x_0}\xi^kh(v_{k+1}-v_k)\partial_1^2u(x_1)\lambda_1\lambda_3\mathrm{d}x_1,$$

其中 $x_0=|\overrightarrow{OB}|$（见图25），$v_k=v(b_0^{(k)})$。注意到 $v_1=0$ 得

$$I_1=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\xi^kx_0}^{\xi^{k-1}x_0}\xi^khv_{k+1}\partial_1^2u(x_1)\lambda_1\lambda_3\mathrm{d}x_1$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\xi^{k+1}x_0}^{\xi^kx_0}\xi^khv_{k+1}\partial_1^2u(x_1)\lambda_1\lambda_3\mathrm{d}x_1$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\xi^k x_0}^{\xi^{k-1}x_0} \xi^k h v_{k+1} \partial_1^2 u(x_1)\lambda_1\lambda_3 \mathrm{d}x_1$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\xi^k x_0}^{\xi^{k-1}x_0} \xi^k h v_{k+1} \partial_1^2 u(\xi x_1)\lambda_1\lambda_3 \mathrm{d}(\xi x_1)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\xi^k x_0}^{\xi^{k-1}x_0} \xi^k h v_{k+1} \int_{\xi}^{1} \frac{\partial}{\partial t}(t\partial_1^2 u(tx_1))\lambda_1\lambda_3 \mathrm{d}t\mathrm{d}x_1$$

$$= \int_{\xi}^{1}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\xi^k x_0}^{\xi^{k-1}x_0} \xi^k h v_{k+1}(\partial_1^2 u(tx_1) + tx_1\partial_1^3 u(tx_1))\lambda_1\lambda_3 \mathrm{d}x_1\mathrm{d}t.$$

令 $tx_1=\tau$，则有

$$I_1 = \int_{\xi}^{1}\sum_{k=1}^{\infty} \xi^k h v_{k+1}\int_{t\xi^k x_0}^{t\xi^{k-1}x_0} (\partial_1^2 u(\tau) + \tau\partial_1^3 u(\tau))\,\lambda_1\lambda_3 \frac{\mathrm{d}\tau}{t}\mathrm{d}t.$$

由定理1.2，

$$|v_{k+1}| \leqslant C|\log h_k|^{\frac{1}{2}}|v|_{1,D}.$$

又已知 $1-\xi\leqslant Ch$，由 Schwarz 不等式得

$$|I_1| \leqslant C\int_{\xi}^{1}\sum_{k=1}^{\infty} \xi^k h|\log h_k|^{\frac{1}{2}}|v|_{1,D}\int_{t\xi^k x_0}^{t\xi^{k-1}x_0}(|\partial_1^2 u(\tau)|$$

$$+ \xi^k|\partial_1^3 u(\tau)|)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t$$

$$\leqslant Ch|v|_{1,D}\int_{\xi}^{1}\sum_{k=1}^{\infty}\xi^k|\log h_k|^{\frac{1}{2}}\cdot\xi^{\frac{k}{2}}h^{\frac{1}{2}}\left(\int_{t\xi^k x_0}^{t\xi^{k-1}x_0}(|\partial_1^2 u(\tau)|^2\right.$$

$$\left.+\xi^{2k}|\partial_1^3 u(\tau)|^2)\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$$

$$\leqslant Ch^{\frac{5}{2}}|v|_{1,D}\int_{\xi}^{1}\sum_{k=1}^{\infty}\xi^{\frac{\sigma-1}{2}k}|\log h_k|^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\left(\int_{t\xi^k x_0}^{t\xi^{k-1}x_0} r^{4-\sigma}(|\partial_1^2 u(\tau)|^2 + r^2|\partial_1^3 u(\tau)|^2)\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t.$$

当 $\alpha<2\pi$，取 $1<\sigma<\dfrac{2\pi}{\alpha}$，由 Schwarz 不等式及(5.15)得

$$|I_1|\leqslant Ch^{\frac{3}{2}}|v|_{1,D}\int_{\xi}^{1}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\xi^{(\sigma-1)k}|\log h_k|^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\int_{t\xi^k x_0}^{t\xi^{k-1}x_0}r^{4-\sigma}$$

$$\times(|\partial_1^2 u(\tau)|^2+r^2|\partial_1^3 u(\tau)|^2)\mathrm{d}\tau\Big)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$$

$$\leqslant Ch^{\frac{5}{2}}|v|_{1,D}\,(h^{-1}|\log h|)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\Big(\int_0^{x_0}r^{4-\sigma}(|\partial_1^2 u(\tau)|^2+r^2|\partial_1^3 u(\tau)|^2)\mathrm{d}\tau\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

由定理1.1，

$$|I_1|\leqslant Ch^2|\log h|^{\frac{1}{2}}\|u\|_{4(\sigma),D}|v|_{1,D}.$$

当 $\alpha=2\pi$，取 $0<\sigma<1$，由定理 1.1 的推论得

$$|I_1|\leqslant Ch^{\frac{5}{2}}|v|_{1,D}\sum_{k=1}^{\infty}\xi^{\frac{\sigma-1}{2}k}\,|\log h_k|^{\frac{1}{2}}|\xi^k h\log(\xi^k h)|^{\frac{1}{2}}\|u\|_{4(\sigma),D}$$

$$\leqslant Ch^2|\log h|\cdot\|u\|_{4(\sigma),D}|v|_{1,D}.$$

总之

$$|A_2|\leqslant Ch^2|\log h|^{\gamma}\|u\|_{4(\sigma),D}|v|_{1,D}.$$

第四步：A_3的估计及证明的完成。

A_3 的估计与 A_1 的估计完全相同，有

$$|A_3|\leqslant Ch^2|\log h|^{\frac{1}{2}}\|u\|_{3(\sigma),D}|v|_{1,D}.$$

最后得(5.11)。▎

定理5.1 设条件(A)，(E)成立，$u\in H^{4(\sigma)}(\Omega)$，$u_h\in S(\Omega)$分别为(3.1)与(3.2)$_1$的解，$u_h^I=\Pi u_0$，则

$$\|u_h-\Pi u\|_{1,\Omega}\leqslant Ch^2|\log h|^{\gamma}\|u\|_{4(\sigma),\Omega},$$

其中常数 σ 与 γ 与引理 5.5 中的常数相同。

证明 取 $v=u_h-\Pi u$，由引理5.5，

$$\begin{aligned}|u_h-\Pi u|_{1,\Omega}^2&=a(u_h-\Pi u,u_h-\Pi u)\\&=a(u-\Pi u,u_h-\Pi u)\\&\leqslant Ch^2|\log h|^{\gamma}\|u\|_{4(\sigma),\Omega}|u_h-\Pi u|_{1,\Omega}.\end{aligned}$$

消去一个因子 $|u_h-\Pi u|_{1,\Omega}$，再利用 Friedrichs 不等式即得定理的结论。 ▎

推论1 在定理5.1的假设下，如果还假设 $u\in W^{2,p(\tau)}(\Omega)$，

$$p>1,\qquad 2-p<\tau<2-\left(1-\frac{\pi}{\alpha}\right)p,$$

则

$$\|u-u_h\|_{0,p,\Omega}\leqslant C\sqrt{p}\,h^2|\log h|^{\gamma}(|u|_{2,p(\tau),\Omega}+\|u\|_{4(\sigma),\Omega}). \tag{5.17}$$

证明 由定理2.2，

$$\|u-\Pi u\|_{0,p,\Omega}\leqslant Ch^2|u|_{2,p(\tau),\Omega}. \tag{5.18}$$

由定理1.1和定理5.1得

$$\begin{aligned}\|u_h-\Pi u\|_{0,p,\Omega}&\leqslant C\sqrt{p}\,\|u_h-\Pi u\|_{1,\Omega}\\&\leqslant C\sqrt{p}\,h^2|\log h|^{\gamma}\|u\|_{4(\sigma),\Omega}.\end{aligned} \tag{5.19}$$

由(5.18),(5.19)即得(5.17)。 ▎

推论2 在定理5.1的假设下，$\forall x\in\Omega$，

$$|(u-u_h)(x)|\leqslant Ch^2|\log h|^{\gamma}(|\log r|+|\log h|)^{\frac{1}{2}}\|u\|_{4(\sigma),\Omega}. \tag{5.20}$$

证明 设 $e_i\subset T_k$，由定理1.2，

$$\begin{aligned}\|u_h-\Pi u\|_{0,\infty,e_i}&\leqslant C|\log h_k|^{\frac{1}{2}}\|u_h-\Pi u\|_{1,\Omega}\\&=C(|\log\xi^k|+|\log h|)^{\frac{1}{2}}\|u_h-\Pi u\|_{1,\Omega}.\end{aligned}$$

由定理2.4，

$$\|u-\Pi u\|_{0,\infty,\Omega}\leqslant Ch^2|u|_{3(\sigma),\Omega}.$$

再利用定理5.1即得(5.20)。 ▎

§6 奇点附近的逐项收敛性

象上一节一样，我们假设剖分在O点附近是相似的，Ω_0被分割成Ω^*与Ω，在Ω^*上作常规的有限元剖分。我们不要求剖分满足条件(E)，但另外给一些条件。

先约定一些记号。将$\partial\Omega$分为两个部分，O点的两条邻边记作Γ^*，$\partial\Omega\backslash\Gamma^*$记作$\Gamma_0$（图30）。按照我们的剖分方式，$\Gamma_0$的相似形是$\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots,\Gamma_k,\cdots$。下面是我们的条件：

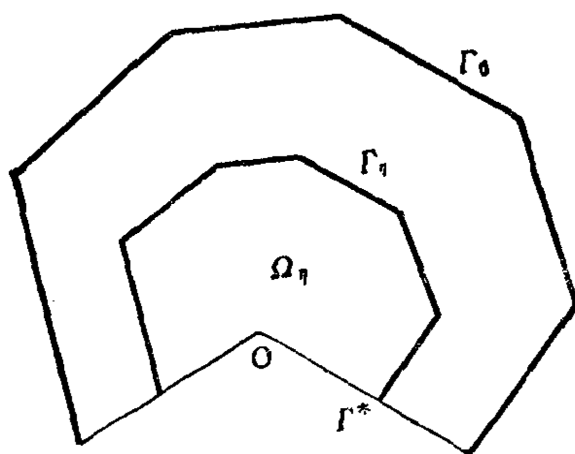


图 30

(F) 在不断细分的过程中，Γ_0保持不变，即区域Ω与Ω^*都不变。

(G) 存在常数$\eta\in(0,1)$，使每次细分的参数ξ都能使$\frac{\log\eta}{\log\xi}$是整数，即以O点为相似中心，η为比例常数，Γ_0的相似形Γ_η永远是剖分的单元边界线（图30）。

(H) Γ_0与Γ^*的夹角不大于$\frac{\pi}{2}$。

我们仍以$S(\Omega)\subset H^1(\Omega)$记线性三角形单元的无限元空间，并且定义

$$H^1_{\Gamma^*}(\Omega)=\{u\in H^1(\Omega);\ u|_{\Gamma^*}=0\},$$

$$S_{\Gamma^*}(\Omega)=S(\Omega)\cap H^1_{\Gamma^*}(\Omega).$$

考虑如下的辅助问题：设 $u_0\in S_{\Gamma^*}(\Omega)$，求 $u\in H^1_{\Gamma^*}(\Omega)$，使 $u|_{\Gamma_0}=u_0|_{\Gamma_0}$，并且

$$a(u,v)=0,\qquad \forall v\in H^1_0(\Omega). \tag{6.1}$$

(6.1)的无限元近似是：求 $u_h\in S_{\Gamma^*}(\Omega)$，使 $u_h|_{\Gamma_0}=u_0|_{\Gamma_0}$，并且

$$a(u_h,v)=0,\qquad \forall v\in S_0(\Omega). \tag{6.2}$$

引理6.1 设条件(A),(F)成立，u,u_h 分别是问题(6.1)与(6.2)的解，则

$$\|u-u_h\|_{0,\Omega}\leqslant Ch|u_0|_{1,\Omega}. \tag{6.3}$$

证明 以区域 Ω 代替区域 Ω_0，利用定理3.2中的(3.10)式得

$$\|u-u_h\|_{0(-\tilde{\sigma}),\Omega}\leqslant Ch|u-u_h|_{1,\Omega}. \tag{6.4}$$

由(6.1)，

$$a(u,u)=\inf_{\substack{v\in H^1_{\Gamma^*}(\Omega)\\ v|_{\Gamma_0}=u_0|_{\Gamma_0}}} a(v,v),$$

因此

$$|u|_{1,\Omega}\leqslant|u_0|_{1,\Omega}. \tag{6.5}$$

同理

$$|u_h|_{1,\Omega}\leqslant|u_0|_{1,\Omega}.$$

将它们代入(6.4)，并去掉权函数 $r^{\tilde{\sigma}}$，就得到(6.3)式。∎

记 Γ_η 与 Γ^* 所包围的区域为 Ω_η，则有

引理6.2 设条件(A),(F),(G)成立，u,u_h 分别是问题(6.1)与(6.2)的解，则

$$\|u-u_h\|_{1,\Omega_\eta}\leqslant Ch|u_0|_{1,\Omega}. \tag{6.6}$$

证明 由(6.5)及 Friedrichs 不等式得

$$\|u\|_{1,\Omega}\leqslant C|u_0|_{1,\Omega}. \tag{6.7}$$

$\|u_h\|_{1,\Omega}$ 也有同样上界，因此我们只需证明(6.6)式对于充分小的 h 成立。

取常数 η_j，$j=1,2,3,4$，使

$$0<\eta_1<\eta_2<\eta<\eta_3<\eta_4<1.$$

以O点为相似中心，η_j 为比例常数，作 Γ_0 的相似形，记作 Γ_{η_j}。我们还以 Ω_{η_j} 表示 Γ_{η_j} 与 Γ^* 所包围的区域，以 $\Omega(\eta_1,\eta)$ 表示介于 Γ_{η_1} 与 Γ_η 之间的那部分 Ω 的子区域，余类推。为简单起见，不妨设 Γ_{η_2} 是剖分的单元边界线。

由内部估计可得[35]

$$\|u\|_{2,\Omega(\eta_1,\eta_4)}\leqslant C\|u\|_{1,\Omega}. \tag{6.8}$$

在 $\Omega(\eta_1,\eta_4)$ 上，剖分是有限的，可以用有限元方法的内部估计得[45]

$$\|u-u_h\|_{1,\Omega(\eta_2,\eta_3)}\leqslant C(h\|u\|_{2,\Omega(\eta_1,\eta_4)}+\|u-u_h\|_{0,\Omega(\eta_1,\eta_4)}). \tag{6.9}$$

作辅助函数 $\zeta\in C^\infty(\bar{\Omega}_{\eta_3})$，满足 $0\leqslant\zeta(x)\leqslant1$，并且在区域 Ω_{η_2} 上，$\zeta\equiv0$，在区域 $\Omega(\eta,\eta_3)$ 上，$\zeta\equiv1$。令

$$v^I=\Pi(\zeta(u-u_h)),$$

则 $v^I|_{\Gamma_\eta}=\Pi u-u_h$。我们估计 $|v^I|_{1,\Omega_\eta}$。任取一个单元 $e_i\subset\Omega_{\eta_3}$，以 b_1,b_2,b_3 记它的三个节点，以 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 记对应的面积坐标。令

$$w_1=\zeta(b_1)\sum_{j=1}^{3}(u(b_j)-u_h(b_j))\lambda_j,$$

$$w_2=\sum_{j=2}^{3}(\zeta(b_j)-\zeta(b_1))(u(b_j)-u_h(b_j))\lambda_j,$$

则 $v^I|_{e_i}=w_1+w_2$。我们有

$$|w_1|_{1,e_i}=\zeta(b_1)\,|\Pi u-u_h|_{1,e_i}\leqslant|\Pi u-u_h|_{1,e_i}, \tag{6.10}$$

$$|w_2|_{1,e_i}\leqslant\sum_{j=2}^{3}|\zeta(b_j)-\zeta(b_1)|\cdot|u(b_j)-u_h(b_j)|\cdot|\lambda_j|_{1,e_i}.$$

$|\lambda_j|_{1,e_i}$是有界量，由 ζ 的光滑性得

$$|\zeta(b_j)-\zeta(b_1)|<Ch.$$

由引理4.3，

$$|u(b_j)-u_h(b_j)|\leqslant Ch^{-1}\|\Pi u-u_h\|_{0,e_i},$$

因此

$$|w_2|_{1,e_i}\leqslant C\|\Pi u-u_h\|_{0,e_i}. \tag{6.11}$$

当 h 充分小时，单元 e_i 的全体可以覆盖区域 Ω_η. 又注意到 $v^I|_{\Omega_{\eta_2}}=0$，由(6.10)，(6.11)得

$$|v^I|_{1,\Omega_\eta}\leqslant C\|\Pi u-u_h\|_{1,\Omega(\eta_2,\eta_3)}.$$

由 Friedrichs 不等式，

$$\|v^I\|_{1,\Omega_\eta}\leqslant C\|\Pi u-u_h\|_{1,\Omega(\eta_2,\eta_3)}. \tag{6.12}$$

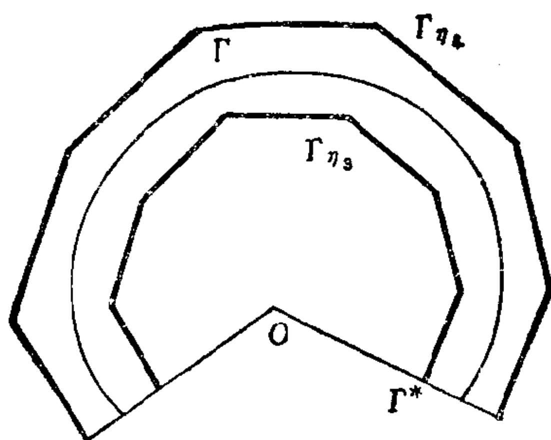


图 31

在区域 $\Omega(\eta_3,\eta_4)$中作一条曲线 Γ，使 Γ 与 Γ^* 围成一个区域 Ω_Γ，除 O 点外，它的边界处处属于 C^∞，如图31. 由(6.7)，(6.8)和迹定理得

$$\|u\|_{\frac{3}{2},\Gamma}\leqslant C|u_0|_{1,\Omega}.$$

类似于引理3.1，可以证明

$$\|u\|_{2(\sigma),\Omega_\Gamma}\leqslant C\|u\|_{\frac{3}{2},\Gamma},$$

因此

$$\|u\|_{2(\sigma),\Omega_\Gamma}\leqslant C\ |u_0|_{1,\Omega}. \qquad (6.13)$$

由定理3.1及(6.12),

$$\|u-u_h\|_{1,\Omega_\eta}\leqslant C\ (h|u|_{2(\sigma),\Omega_\eta}+\|\Pi u-u_h\|_{1,\Omega(\eta_2,\eta_3)}).$$

由三角不等式,

$$\|\Pi u-u_h\|_{1,\Omega(\eta_2,\eta_3)}$$
$$\leqslant\|\Pi u-u\|_{1,\Omega(\eta_2,\eta_3)}\ +\|u-u_h\|_{1,\Omega(\eta_2,\eta_3)}.$$

由定理2.2, 当 h 充分小时,

$$\|\Pi u-u\|_{1,\Omega(\eta_2,\eta_3)}\leqslant Ch|u|_{2(\sigma),\Omega_\Gamma}.$$

于是

$$\|u-u_h\|_{1,\Omega_\eta}\leqslant C\ (h|u|_{2(\sigma),\Omega_\Gamma}+\|u-u_h\|_{1,\Omega(\eta_2,\eta_3)}).$$

以(6.13),(6.9),(6.8),(6.7)代入得

$$\|u-u_h\|_{1,\Omega_\eta}\leqslant C(h|u_0|_{1,\Omega}+\ \|u-u_h\|_{0,\Omega(\eta_1,\eta_4)}).$$

以引理6.1的结论代入即得(6.6)式. ▌

考虑如下的辅助问题: 设 $u_0\in H^1_{\Gamma^*}(\Omega)$, 求 $u\in H^1_{\Gamma^*}(\Omega)$, 使 $u|_{\Gamma_0}=u_0|_{\Gamma_0}$, 并且

$$a(u,v)=0,\quad \forall v\in H^1_0(\Omega). \qquad (6.14)$$

设 u 为问题(6.14)的解, 令

$$w(x)=u(\eta x),\quad \forall x\in\Omega.$$

显然 $w\in H^1_{\Gamma^*}(\Omega)$, 我们记 $w=Au_0$. A 是一个有界线性算子. 由(6.13), 利用嵌入定理不难看出 A 是一个紧算子。

我们定义算子 A 的近似. 以问题(6.2)代替问题(6.14),用同样的方式可以得到一个算子

$$A_h:\ S_{\Gamma^*}(\Omega)\to S_{\Gamma^*}(\Omega).$$

在(6.2)中, u_h 是无限元方法的解, 由第一章中的讨论, 节点上

的值可以表示为

$$y_k = X^k y_0,$$

其中X为转移矩阵。因此A_h的值空间是有限维的。

我们用两种不同的方式将A_h延拓到空间$H^1_{r^*}(\Omega)$.以$a(\cdot,\cdot)$作为空间$H^1_{r^*}(\Omega)$中的内积，定义正交投影算子

$$P: H^1_{r^*}(\Omega) \to S_{r^*}(\Omega).$$

在$H^1_{r^*}(\Omega)$上，令

$$A_h = A_h P + A(I-P), \quad A_h^* = A_h P.$$

引理6.3 设条件(A),(F),(G),(H)成立，则

$$\|A - A_h\| \leqslant Ch, \tag{6.15}$$

$$\|A - A_h^*\| \leqslant Ch^{\frac{1}{2}-s}, \tag{6.16}$$

其中$0<s<\frac{1}{2}$，(6.16)式中的常数C依赖于s。

证明 任取$u_0 \in H^1_{r^*}(\Omega)$，由引理6.2,

$$\begin{aligned}\|Au_0 - A_h u_0\|_{1,\Omega} &= \|A_h Pu_0 - APu_0\|_{1,\Omega} \\ &\leqslant Ch|Pu_0|_{1,\Omega} \leqslant Ch|u_0|_{1,\Omega}.\end{aligned} \tag{6.17}$$

于是(6.15)得证。我们下面证明(6.16)。由三角不等式,

$$\|Au_0 - A_h^* u_0\|_{1,\Omega} \leqslant \|A(u_0 - Pu_0)\|_{1,\Omega} + \|(A - A_h)Pu_0\|_{1,\Omega}. \tag{6.18}$$

在Ω上以$(u_0 - Pu_0)|_{\partial\Omega}$为边值，求Laplace方程的弱解，记作$w$。由内部估计得

$$\|w\|_{1,\Omega(\eta_1,\eta_4)} \leqslant C\|w\|_{\frac{1}{2}+s,\Omega}. \tag{6.19}$$

令$w' = w - (u_0 - Pu_0)$，则$w' \in H^1_0(\Omega)$，并且满足方程

$$a(w',v) = -a(u_0 - Pu_0, v), \quad \forall v \in H^1_0(\Omega). \tag{6.20}$$

任取$\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$，作如下边值问题的解：

$$\begin{cases} -\Delta v = \varphi, \\ v|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

则 v 是古典解. 以$(\cdot,\cdot)$记 L^2 内积，利用 Green 公式得

$$(w',\varphi)=(w',-\Delta v)=a(w',v).$$

由(6.20)得

$$(w',\varphi)=-\int_\Omega \nabla(u_0-Pu_0)\cdot\nabla v\mathrm{d}x.$$

容易证明

$$\|v\|_{\frac{3}{2}-s,\Omega}\leqslant C\|\varphi\|_{-\frac{1}{2}-s,\Omega},$$

即有

$$\|\nabla v\|_{\frac{1}{2}-s,\Omega}\leqslant C\|\varphi\|_{-\frac{1}{2}-s,\Omega}.$$

另一方面，

$$\|\nabla(u_0-Pu_0)\|_{s-\frac{1}{2},\Omega}\leqslant C\|u_0-Pu_0\|_{\frac{1}{2}+s,\Omega},$$

所以

$$|(w',\varphi)|\leqslant C\|u_0-Pu_0\|_{\frac{1}{2}+s,\Omega}\|\varphi\|_{-\frac{1}{2}-s,\Omega},$$

$$\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega).$$

已知 $w'\in H_0^1(\Omega)$，所以

$$\|w'\|_{\frac{1}{2}+s,\Omega}\leqslant C\|u_0-Pu_0\|_{\frac{1}{2}+s,\Omega}.$$

由三角不等式得

$$\|w\|_{\frac{1}{2}+s,\Omega}\leqslant C\|u_0-Pu_0\|_{\frac{1}{2}+s,\Omega}. \tag{6.21}$$

我们再用定理3.2的方法估计$\|u_0-Pu_0\|_{0,\Omega}$，注意到

$$a(Pu_0,v)=a(u_0,v),\quad \forall v\in S_{\Gamma^*}(\Omega),$$

令$g=r^{\tilde{\sigma}}(u-u_h)$，并考虑混合边值问题

$$\begin{cases}-\Delta\varphi=g,\\ \varphi|_{\Gamma^*}=0,\quad \left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|_{\Gamma_0}=0.\end{cases}$$

类似于引理3.1，可以证明

$$\|\varphi\|_{2(\sigma),\Omega}\leqslant C\|g\|_{0(\tilde{\sigma}),\Omega}.$$

这时(3.9)式中右端第二项等于零，即

$$\|u-u_h\|^2_{0(-\tilde{\sigma}),\Omega}=a(u-u_h,\varphi-\Pi\varphi).$$

象(3.10)一样，可以证明

$$\|u_0-Pu_0\|_{0(-\tilde{\sigma}),\Omega}\leqslant Ch|u_0-Pu_0|_{1,\Omega}.$$

去掉权函数$r^{\tilde{\sigma}}$，注意到

$$|u_0-Pu_0|_{1,\Omega}\leqslant|u_0|_{1,\Omega},$$

即有

$$\|u_0-Pu_0\|_{0,\Omega}\leqslant Ch|u_0|_{1,\Omega}.$$

我们又有

$$\|u_0-Pu_0\|_{1,\Omega}\leqslant C|u_0|_{1,\Omega},$$

由内插不等式[42]得

$$\|u_0-Pu_0\|_{\frac{1}{2}+s,\Omega}\leqslant Ch^{\frac{1}{2}-s}|u_0|_{1,\Omega},$$

代入(6.21)式得

$$\|w\|_{\frac{1}{2}+s,\Omega}\leqslant Ch^{\frac{1}{2}-s}|u_0|_{1,\Omega}.$$

再代入(6.19)式得

$$\|w\|_{1,\Omega(\eta_1,\eta_4)}\leqslant Ch^{\frac{1}{2}-s}|u_0|_{1,\Omega}.$$

由迹定理，

$$\|w\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega_\eta}\leqslant Ch^{\frac{1}{2}-s}|u_0|_{1,\Omega}.$$

在 Ω_η 上 w 是 Laplace 方程的弱解，因此

$$\|w\|_{1,\Omega_\eta}\leqslant Ch^{\frac{1}{2}-s}|u_0|_{1,\Omega},$$

即

$$\|A(u_0-Pu_0)\|_{1,\Omega}\leqslant Ch^{\frac{1}{2}-s}|u_0|_{1,\Omega}.$$

由(6.17)，(6.18)得

$$\|Au_0-A_h^*u_0\|_{1,\Omega}\leqslant Ch^{\frac{1}{2}-s}|u_0|_{1,\Omega}.$$

于是(6.16)得证。▎

我们根据展开式(0.2)计算算子 A 的特征值及特征函数。设 λ 与 u_0 是算子 A 的特征值与特征函数，$\lambda\neq 0$，则

$$\lambda u_0 = Au_0. \tag{6.22}$$

按定义 Au_0 在 Ω 上是 Laplace 方程满足边界条件 $Au_0|_{\Gamma^*}=0$ 的解，由(6.22)，u_0 也是解。由方程(6.14)，$u=u_0$。由(6.22)，

$$\lambda u_0(x) = u_0(\eta x), \quad \forall x\in\Omega. \tag{6.23}$$

在 O 点附近 u_0 有展开式(0.2)。以(0.2)代入(6.23)得

$$\lambda\sum_{j=1}^{\infty} c_j r^{\frac{j\pi}{\alpha}}\sin\frac{j\pi}{\alpha}(\theta-\theta_0)$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty} c_j (\eta r)^{\frac{j\pi}{\alpha}}\sin\frac{j\pi}{\alpha}(\theta-\theta_0).$$

比较两端的系数，可以看出，必存在 $j\in \boldsymbol{N}$ 和常数 $c_j\neq 0$，使

$$\lambda=\eta^{\frac{j\pi}{\alpha}},\quad u_0=c_j r^{\frac{j\pi}{\alpha}}\sin\frac{j\pi}{\alpha}(\theta-\theta_0). \tag{6.24}$$

反之，容易看出，由(6.24)给出的 λ 与 u_0 是算子 A 的特征值与特征函数。以后我们分别记它们为 λ_j 与 u_j。

设 $\eta=\xi^k$。以 X 记第一章中所定义的转移矩阵。我们以 λ_{h1}，λ_{h2}，…记矩阵 X^k 的特征值，按模自大而小的次序排列。向量 y_0 可以按 X^k 的特征展开，从而无限元解也可以有展开式

$$u_h=\sum_j u_{hj}, \tag{6.25}$$

其中 u_{hj} 对应于 λ_{hj}。

定理6.1 设条件(A),(F),(G),(H)成立。固定 $j\in\boldsymbol{N}$，则存在常数 C 及 $h_0>0$，使当 $h\leqslant h_0$ 时，

$$|\lambda_j-\lambda_{hj}|\leqslant Ch. \tag{6.26}$$

此外，若 u 与 u_h 分别是问题(3.1),(3.2)$_1$ 的解，(0.2),(6.25)是它们在 O 点附近的展开式，则当 $h\leqslant h_0$ 时，

$$\|u_j-u_{hj}\|_{1,\Omega}\leqslant C\{\|u-u_h\|_{1,\Omega}+h\|u\|_{1,\Omega}\}. \tag{6.27}$$

证明 以$R(z,A)$，$R(z,A_h)$，$R(z,A_h^*)$分别记算子A,A_h,A_h^*在复平面上的预解式，则$R(z,A)$的极点为λ_j，$j=1,2,\cdots$。作圆$\mathscr{C}$，使$\lambda_{j+1},\lambda_{j+2},\cdots$以及$\lambda=0$在$\mathscr{C}$内部，$\lambda_1,\cdots,\lambda_j$在其外部。由算子摄动理论[38]以及引理6.3，存在常数$h_1>0$，使当$h\leqslant h_1$时，预解式$R(z,A_h)$，$R(z,A_h^*)$在$\mathscr{C}$的附近永远是解析的，并且在$\mathscr{C}$外A_h与A_h^*都恰有j个特征值。因为A_h^*的特征值都是A_h的特征值，所以在$\mathscr{C}$外A_h^*与A_h的特征值重合。

不难看出，除$\lambda=0$外，A_h^*的特征值与X^k的特征值是相同的。在圆$\mathscr{C}$外，它们就是$\lambda_{h1},\cdots,\lambda_{hj}$。

以λ_j为中心，δ为半径，作圆$\mathscr{C}_j$，

$$0<\delta<|\lambda_j-\lambda_{j+1}|,$$

则λ_j是圆内A的唯一特征值。$z=\lambda_j$是$R(z,A)$的一阶极点，在$\mathscr{C}_j$上，

$$\|R(z,A)\|\leqslant\frac{C_1}{\delta}.$$

由引理6.3，

$$\|A-A_h\|\leqslant C_2h.$$

令$h_0=\min\left\{h_1,\ \dfrac{|\lambda_j-\lambda_{j+1}|}{C_1C_2+2}\right\}$，取$\delta=(C_1C_2+1)h$，则只要$h\leqslant h_0$，就有

$$\|A-A_h\|\leqslant\frac{\delta}{C_1}.$$

所以λ_{hj}在$\mathscr{C}_j$的内部，即

$$|\lambda_j-\lambda_{hj}|<\delta=(C_1C_2+1)h.$$

于是(6.26)得证。

现在固定δ，$0<\delta<|\lambda_j-\lambda_{j+1}|$。令

$$P_j(A)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}_j}R(z,A)\mathrm{d}z,$$

$$P_j(A_h) = -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma_j} R(z, A_h)\mathrm{d}z,$$

$$P_j(A_h^*) = -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma_j} R(z, A_h^*)\mathrm{d}z,$$

则它们是从$H^1_{\Gamma^*}(\Omega)$到特征空间上的投影[38]．当$h\leqslant h_0$时，这些特征空间互相同构,因此它们都是一维的．从展开式(0.2)(6.25)得

$$u_j = P_j(A)u,\quad u_{hj} = P_j(A_h^*)u_h.$$

但是$u_h \in S_{\Gamma^*}(\Omega)$，在$S_{\Gamma^*}(\Omega)$上$A_h^* = A_h$，所以又有

$$u_{hj} = P_j(A_h)u_h.$$

由引理6.3以及算子$P_j(A_h)$的有界性得

$$\begin{aligned}
&\|P_j(A)u - P_j(A_h)u_h\|_{1,\Omega}\\
&\quad\leqslant \|P_j(A)u - P_j(A_h)u\|_{1,\Omega} + \|P_j(A_h)u - P_j(A_h)u_h\|_{1,\Omega}\\
&\quad\leqslant C\{h\|u\|_{1,\Omega} + \|u - u_h\|_{1,\Omega}\}.
\end{aligned}$$

此即(6.27)。 ▌

我们已经在§3中得到了$\|u-u_h\|_{1,\Omega_0}$的估计，再结合定理6.1就得到了展开式的逐项误差估计。定理6.1还给出了指数的估计，易见无限元解的第j项$u_{hj}\sim r^{a_j}$,

$$a_j = \frac{\log \lambda_{hj}}{\log \eta},$$

由(6.26)得

$$\left|a_j - \frac{j\pi}{\alpha}\right| \leqslant Ch.$$

在第一章§10中，我们曾经给出了一个计算应力强度因子的方法。对于问题(0.1)，它是这样的：我们希望求(0.2)中c_j的近似值，令

$$A_j = a\left(r^{\frac{j\pi}{\alpha}}\sin\frac{j\pi}{\alpha}(\theta-\theta_0),\, r^{-\frac{j\pi}{\alpha}}\sin\frac{j\pi}{\alpha}(\theta-\theta_0)\right),$$

则

$$a(u_j, u_j) = c_j^2 A_j.$$

另一方面，设无限元解按特征向量$g_1, \cdots, g_n$展开为

$$y_0 = \sum_{j=1}^{n} d_j g_j,$$

则用第一章组合刚度矩阵的记号

$$a(u_{hj}, u_{hj}) = d_j^2 g_j^T K_z g_j,$$

于是可以令

$$c_{hj}^2 = \frac{1}{A_j} d_j^2 g_j^T K_z g_j,$$

它是c_j^2的近似值. 可以有估计

$$\begin{aligned}
|c_j^2 - c_{hj}^2| &= \frac{1}{A_j} |a(u_j, u_j) - a(u_{hj}, u_{hj})| \\
&= \frac{1}{A_j} |a(u_j, u_j) - a(u_j, u_{hj}) \\
&\quad + a(u_j, u_{hj}) - a(u_{hj}, u_{hj})| \\
&\leqslant \frac{1}{A_j} (|u_j|_{1,\Omega} + |u_{hj}|_{1,\Omega}) \\
&\quad \times |u_j - u_{hj}|_{1,\Omega}.
\end{aligned}$$

利用定理3.1的推论以及定理6.1可得

$$|c_j^2 - c_{hj}^2| = O(h).$$

附　　记

本章第一节的材料来自[23],[25]；第二与第三节的材料来自[6],[23]与[25]；第四与第五节的材料来自[23],[25],但是其中一些引理是[37],[44]及[49]中的结果；第六节的材料来自[6],

[19]，但是作了较大的更动，改正了原来证明中的一些不严密之处。

在参考文献中，有些定理是就平面弹性问题叙述与证明的，为了便于阅读，我们在这里把它们一律改成 Laplace 方程。第三节与第六节中的结果对于很多椭圆型方程都是成立的。但是第四节与第五节的结论与证明方法似乎局限性较大，我们现在还不大清楚这些结论能推广到什么程度。

有些参考文献中的材料我们没有收入，例如[21]中不相似问题无限元方法的收敛性，[27]中 Stokes 问题无限元方法的收敛性等。对这些有兴趣的读者可以参阅原文

第四章　例

§1　边值问题与特征值问题

图32表示的是一个带凹角的多边形区域 Ω，在O点的内角 $\alpha>\pi$。我们求如下边值问题：

$$\Delta u+\lambda u=0, \tag{1.1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_*}=\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\Gamma^*}=0, \tag{1.2}$$

$$u|_{\Gamma_0}=f \tag{1.3}$$

的数值解。设 $\lambda\geqslant 0$，在边界 Γ_0 上取11个节点，其坐标如表 1 所示。作无限的相似剖分如图10。

表　1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x	4.0	3.5	2.7	1.85	1.0	0	−1.2	−1.8	−2.4	−2.7	−3.0
y	0	0.8	1.6	2.1	2.6	2.6	2.6	1.95	1.3	0.15	−1.0

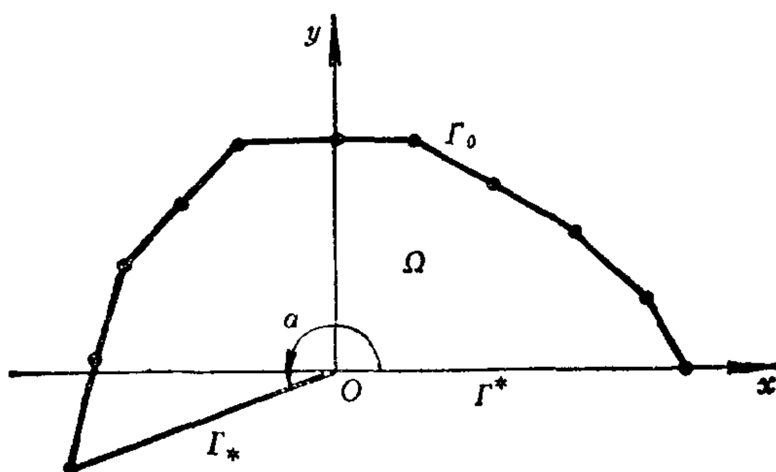


图　32

用分离变量方法容易求出在O点附近解的展开式为

$$u=a_0J_0(\sqrt{\lambda}\,r)+\sum_{j=1}^{\infty}a_jJ_{\frac{j\pi}{\alpha}}(\sqrt{\lambda}\,r)\cos\frac{j\pi}{\alpha}\theta. \quad (1.4)$$

取对应于$j=1$的项作为一个精确解：

$$u=J_{\frac{\pi}{\alpha}}(\sqrt{\lambda}r)\cos\frac{\pi}{\alpha}\theta, \quad (1.5)$$

并且令$\lambda=0.1$. 以(1.5)确定Γ_0各节点上的值，然后用无限元方法解上述问题，再与精确结果比较，结果如下：

a. 奇点附近的渐近性.

由(1.5)，精确解u在O点附近可以展开为

$$u=c_1+c_2r^{\frac{\pi}{\alpha}}\cos\frac{\pi}{\alpha}\theta+\cdots, \quad (1.6)$$

其中

$$c_1=0,\quad c_2=0.1946,\quad \pi/\alpha=0.9071,$$

余项为比$r^{\frac{\pi}{\alpha}}$更高阶的无穷小量.

由第一章(12.6)式，无限元解在O点附近为

$$y_k=\alpha(\lambda)g_1+\beta(\lambda)g_2\lambda_2^k+\cdots. \quad (1.7)$$

类似于第一章§10中关于转移矩阵X的特征值的讨论，可以看出

表 2

ξ	$\frac{\log\lambda_2}{\log\xi}$	相对误差	$\tilde{c}_2^2$	相对误差
0.80	0.9083	0.13%	0.03728	1.59%
0.85	0.9084	0.14%	0.03731	1.52%
0.90	0.9087	0.18%	0.03714	1.97%
0.95	0.9094	0.25%	0.03717	1.86%

$$\frac{\log \lambda_2}{\log \xi} \doteq \frac{\pi}{\alpha}.$$

用第一章§10中的方法，比较(1.6)与(1.7)的第二项的应变能，可以求出 c_2^2 的近似值，我们把它记作 $\tilde{c}_2^2$。所得结果列成表2。

b. 节点值的比较。

对于$\xi=0.80,0.85,0.90,0.95$，我们分别计算 Γ_0 附近7层，10层，12层，25层节点上 u 的近似值，与精确解比较，相对误差分别为1.09%，1.21%，1.59%，2.8%。

下面，我们在(1.3)式中取 $f=0$，讨论特征值问题(1.1)，(1.2)，(1.3)，为了能求出精确解，设区域为扇形

$$\Omega=\{(r,\theta);0<r<R,0<\theta<\alpha\}.$$

在圆周 $r=R$ 上仍取11个节点，以 Γ_0 记节点的联线，我们把 Γ_0，Γ^*，Γ_*所围成的区域记作Ω_h，如图33。

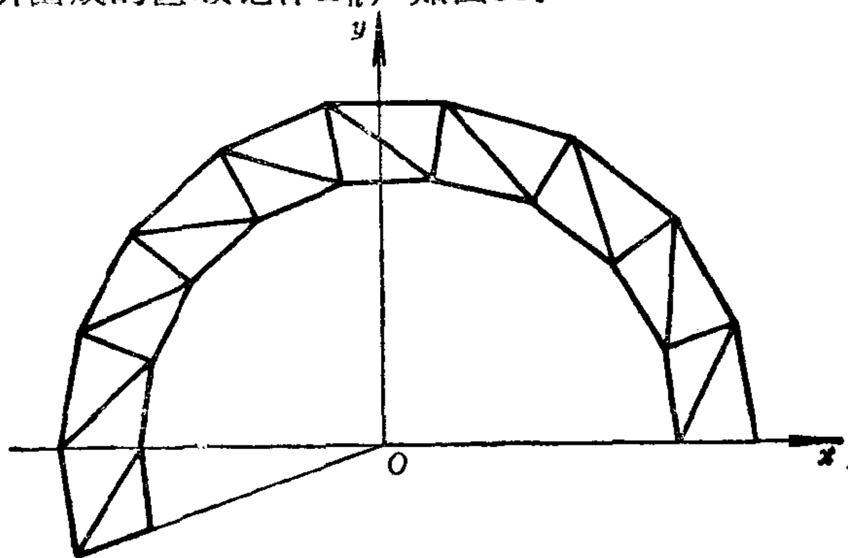


图 33

由(1.4)式容易看出，最小特征值λ为

$$J_0(\sqrt{\lambda}R)=0$$

的最小零点。取 $R=4$，则

$$\lambda=0.3614.$$

用无限元方法求得的最小特征值 μ 见表3。与精确值比较，近似特征值偏大一些，这里产生的误差除了由于剖分离散所引起的以外，$\Omega_h\subset\Omega$也是一个原因。

表 3

ξ	0.65	0.75	0.85
μ	0.3748	0.3769	0.3820

现在考查第二个原因的影响。以O点为相似中心，以$1/\cos 10°$为比例常数，将整个组合单元Ω_h作一相似变换，则Γ_0的像Γ_0恰为圆$r=R$的外切多边形。以μ'记对于这个区域的最小特征值，则由第2章定理12.5的讨论

$$\mu' = \mu \cos^2 10°.$$

按此公式计算得到表4。可以看出，精确度有所改善。这是因为，求μ'时，离散化使特征值偏大，而区域扩大使特征值偏小，二者相消，使近似值更接近于精确值一些。

表 4

ξ	0.65	0.75	0.85
μ'	0.3634	0.3655	0.3705

本章的材料选取自[31]。

§2 应力强度因子

图34表示的是断裂试验中的一件三点弯曲试样。在试样中间有一长为a的裂纹。当作用力P逐渐增大时，试样的变形也会增大，直至裂纹扩张而断裂。我们计算不同P值下的应力强度因子K_I，结合上述试验，就可以得到临界的K_I值K_{IC}，以此作为机械设计的标准。

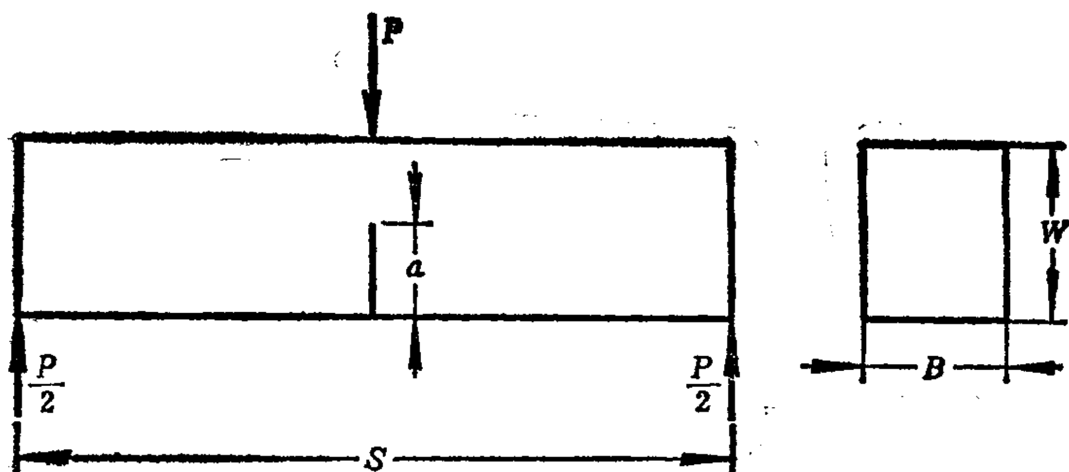


图 34

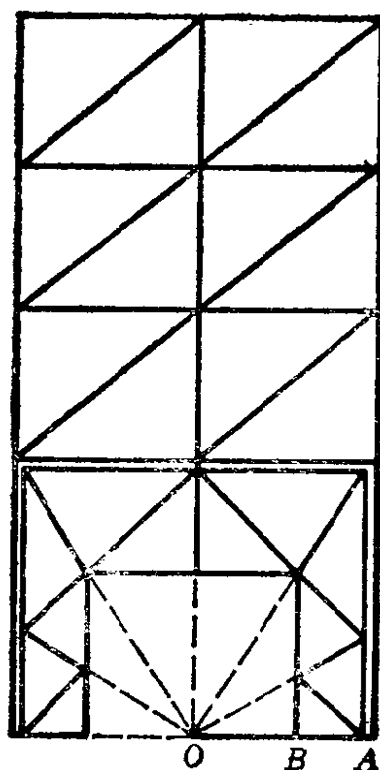


图 35

现在用无限元方法计算 K_I. 上述问题符合图12所示的对称条件，所以可以只计算一半. 图35是一个典型的剖分，使用线性三角形单元，O 为角点，OA 为裂纹，双线内为组合单元 Ω. 若以 n 记 Γ_0 上的节点数，n_1 记节点总数，则在图35所示的剖分中，

$n=7$，$n_1=16$。这里要注意的是，确切地说，节点总数为∞，n_1指的是实际参与求解的节点数。同样，考虑实际参与计算的单元，以N记组合单元之外的单元与第一层Ω_1的单元个数之和，则$N=24$。用n, n_1, N可以刻画本问题所需的计算量。在图35中$\xi=OB/OA=0.6$。ξ的大小对计算量不产生影响，但是下面将会看到，它对于计算结果却有很大影响。

引进无量纲化的应力强度因子

$$K_I^* = \frac{K_I B W^{3/2}}{M},$$

其中$M=\frac{1}{4}Ps$代表弯矩。我们取 Poisson 比为0.3，$s/W=4$，$a/W=0.5$，则对于图 35 所示的剖分，在不同的ξ值下，所得的K_I^*值见表5。

表 5

ξ	0.6	0.7	0.8	0.85	0.9
K_I^*	9.876	10.233	10.366	10.397	10.350

众所周知，有限元方法的应变能比真值偏小[52]，无限元解也有同样的性质。而我们的K_I值是从应变能确定的，因此我们认为$\xi=0.85$时的K_I^*值更接近真值一些。

从上述结果可以看出，当ξ值提高时，精度会有所提高，但达到一定限度以后，再增加ξ值，对结果影响不大，甚至精度有所下降。这是因为随着ξ的提高，三角形单元的最小内角随之减小，对精度产生了不利影响。为了得到好的结果，n与ξ值应该协调一致。

对于平面弹性问题，K_I的值与 Poisson 比无关[41]。但是在无限元方法中应变能是近似的，故 Poisson 比的值给K_I也带来影响。我们取 Poisson 比为 0.2 与 0.3 作了对比，计算结果表明，

相对误差仅0.5%，因此 Poisson 比的影响是不大的。

以 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$ 记转移矩阵 X 的特征值，按公式

$$\alpha_j=\frac{\log\lambda_j}{\log\xi}$$

计算指数。现在，将剖分不断加密，观察指数的变化得到表6。

表 6

n	ξ	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4
7	0.85	0	0.5199	1	1.3932	1.6341
9	0.85	0	0.5105	1	1.4846	1.7245
11	0.9	0	0.5058	1	1.4888	1.7950
13	0.95	0	0.5049	1	1.4905	1.8553
21	0.95	0	0.5018	1	1.4961	1.9382
29	0.95	0	0.5009	1	1.4981	1.9677
精确值		0	0.5	1	1.5	2

我们看到结果在收敛，精确度是很好的。其中 α_0 与 α_2 对应的是线性解，因此无限元方法得到的是精确值。从表 6 还可以看出，j 愈小，收敛愈快，与第三章的结果一致。

再看随着网格的加密，K_j^* 值的变化，可以得到表 7。我们

表 7

n	n_1	N	ξ	K^*_1
7	16	24	0.85	10.397
9	43	72	0.85	10.281
11	52	90	0.9	10.383
13	62	108	0.95	10.425
21	112	208	0.95	10.523
29	132	254	0.95	10.542

看到结果也在收敛。在[12]中还将此结果与边界配位法的计算结

果作了比较。边界配位法也是一种近似方法，两者可以互相印证。对于这个问题，边界配位法的结果为 $K_I^*=10.6$，与细网格时的 K_I^* 值仅相差0.6%，与最粗的网格的 K_I^* 值也仅相差2%左右。上述结果是令人满意的。

利用最小二乘法可以得到近似公式

$$K_I^* = \left[7.76 + 1.54\left(0.75 - \frac{a}{W}\right)^2\right]\sec\frac{\pi a}{2W}\sqrt{\tan\frac{\pi a}{2W}}.$$

本节的材料取自[12]和[19]。在[12]中还有拱形试样的有关计算数据。

§3 Stokes 绕流

我们给出第一章§11的一个数值例子。设流体绕过一圆球，无穷远处速度为 $u_\infty=0, v_\infty=1$，圆球半径为1，粘性系数 $\mu=1$，则解的表达式为

$$u=(c_1-c_2)\sin\theta\cos\theta,$$

$$v=c_1\cos^2\theta+c_2\sin^2\theta,$$

$$p=-\frac{3}{2r^2}\cos\theta+p_\infty,$$

其中

$$c_1=1-\frac{3}{2r}+\frac{1}{2r^3},$$

$$c_2=1-\frac{3}{4r}-\frac{1}{4r^3},$$

p_∞ 为任意常数，$r=\sqrt{x^2+y^2}$，$\theta\in[0,\pi]$ 为向径与 y 轴的夹角，如图36。取剖分如图37，每一层内取36个三角形单元，在圆周上取均匀剖分且网格关于 x 轴对称。由问题的对称性，所得到的无限元解关于 x 轴也具有对称性，具体说来，u 为反对称，v 为对称，p 为反对称，为简单起见，不妨取 $p_\infty=0$。

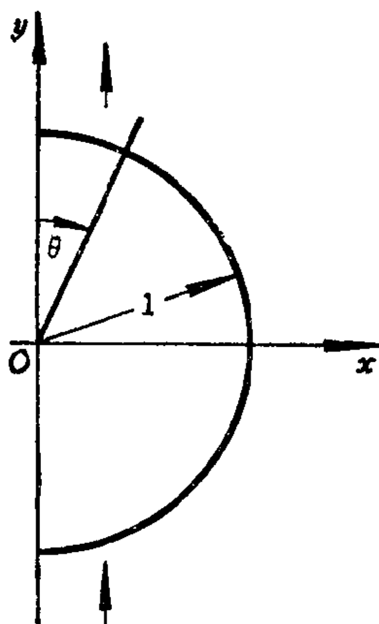


图36

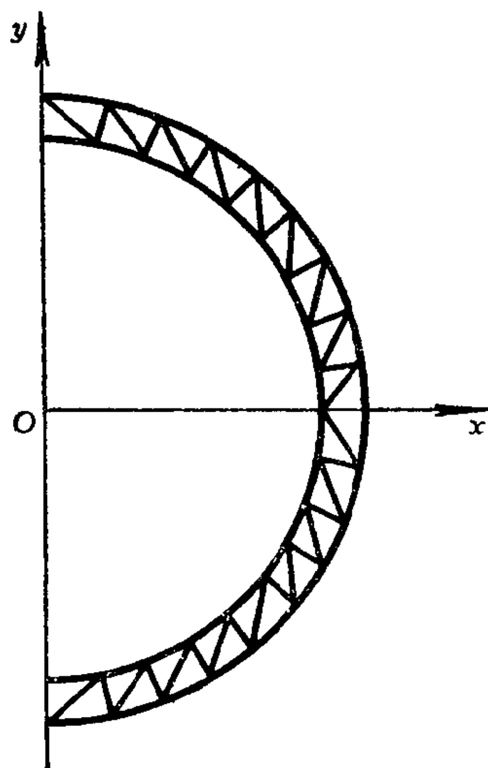


图 37

取$\xi=1.05$与$\xi=1.1$。对于$\xi=1.05$，当$\theta=0°,45°,90°$时的速度对比见表10,11,12。结果是令人满意的。$\xi=1.1$时的计算结果类似，此处不再列出。

表8 $\theta=0°$

y	u	u(精确值)	v	v(精确值)
1	0	0	0	0
1.025	0	0	0.00165	0.00089
1.1025	0	0	0.01258	0.01256
1.2155	0	0	0.04501	0.04436
1.3401	0	0	0.08956	0.08844
1.4775	0	0	0.14121	0.13977
1.6289	0	0	0.19643	0.19482
1.7959	0	0	0.25278	0.25107
1.9799	0	0	0.30854	0.30682
2.1829	0	0	0.36260	0.36090

表9　$\theta = 45°$

x	u	u(精确值)	v	v(精确值)
0.7044	0	0	0	0
0.7205	−0.01636	−0.01502	0.01794	0.01559
0.7766	−0.05901	−0.05839	0.07145	0.07004
0.8562	−0.09845	−0.09848	0.14280	0.14133
0.9440	−0.12288	−0.12329	0.21133	0.20984
1.0407	−0.13651	−0.13717	0.27631	0.27485
1.1474	−0.14252	−0.14333	0.33737	0.33596
1.2650	−0.14322	−0.14412	0.39433	0.39300
1.3947	−0.14032	−0.14125	0.44718	0.44592
1.5377	−0.13504	−0.13598	0.49599	0.49481

表10　$\theta = 90°$

x	u	u(精确值)	v	v(精确值)
1	0	0	0	0
1.025	0	0	0.03817	0.03614
1.1025	0	0	0.13819	0.13317
1.2155	0	0	0.24799	0.24376
1.3401	0	0	0.33998	0.33646
1.4775	0	0	0.41782	0.41485
1.6289	0	0	0.48425	0.48172
1.7959	0	0	0.54138	0.53921
1.9799	0	0	0.59087	0.58899
2.1829	0	0	0.63403	0.63238

固体表面上的压力对比见表11。可以看出，结果基本符合，但精确度比速度差一些。看来这是由于速度为二次插值，而压力为零次插值的缘故。

圆球所受的阻力的对比见表12。可以看出，结果是令人满意的，$\xi = 1.1$时的值更接近于精确值一些。

在计算过程中用迭代法求组合刚度矩阵。用第一类迭代法计算7次，十进制有效数字达到五位左右，然后用第二类迭代法计

表 11

θ	$p(\xi=1.05)$	$p(\xi=1.1)$	p(精确值)
5°	−1.4709	−1.4470	−1.4886
15°	−1.4142	−1.3788	−1.4433
25°	−1.3228	−1.2917	−1.3543
35°	−1.1925	−1.1679	−1.2241
45°	−1.0262	−1.0100	−1.0566
55°	−0.8291	−0.8218	−0.8571
65°	−0.6073	−0.6090	−0.6315
75°	−0.3668	−0.3782	−0.3868
85°	−0.1163	−0.1369	−0.1302

表 12

	$\xi=1.05$	$\xi=1.1$	精确值
阻力	18.424	18.748	6π
相对误差	2.26%	0.54%	0

算3次，十进制有效数字超过十位。

以上数值试验是由魏万明完成的。

§4 Navier-Stokes 绕流

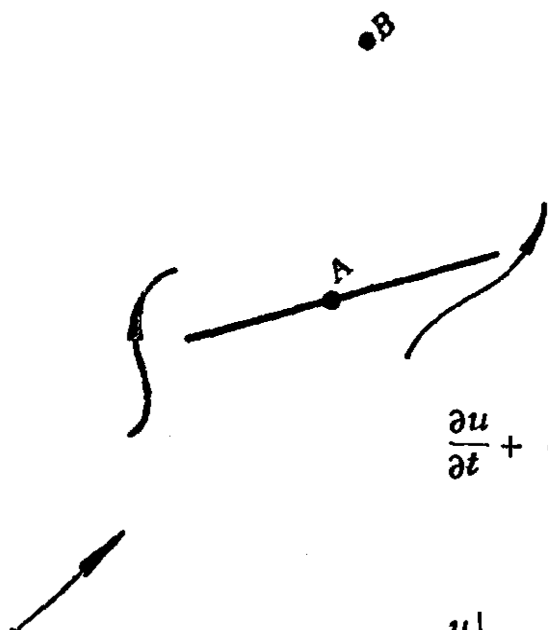


图 38

考虑粘性不可压缩流体绕过一平板，如图38。为简单起见，设流动是二维的。以 Ω_0 记平板的外部区域，则流体运动由如下的 Navier-Stokes 方程的初边值问题所描述[51]：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+(u\cdot\nabla)u+\frac{1}{\rho}\nabla p=\nu\Delta u, \tag{4.1}$$

$$\nabla\cdot u=0, \tag{4.2}$$

$$u|_{x\in\partial\Omega_0}=0, \quad u|_{|x|\to\infty}=u_\infty, \tag{4.3}$$

$$u|_{t=0}=u_0(x), \tag{4.4}$$

其中 $u=(u_1,u_2)$是速度，p 是压力，正的常数 ρ,ν表示密度与粘性系数。

设涡度为 $\omega=\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}$，我们还引进流函数$\psi$，使得 $u=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}-\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)$。可以任意取定平板上一点 A，令 $\psi(A)=0$，然后作如下的线积分以确定ψ：

$$\psi(x)=\int_{\widehat{AB}}(-u_2\mathrm{d}x_1+u_1\mathrm{d}x_2). \tag{4.5}$$

由（4.2）可知(4.5)与路径无关。在平板的两侧均有$\psi|_{\partial\Omega_0}=0$。利用$u$满足的无穷远边界条件，可以给出$\psi$满足的无穷远边界条件

$$\psi(x)=-u_{2\infty}x_1+u_{1\infty}x_2+O(1), \tag{4.6}$$

其中 $u_{1\infty},u_{2\infty}$是 u_∞的分量。以ω与ψ为未知函数，则它们满足

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+(u\cdot\nabla)\omega=\nu\Delta\omega,$$

$$\Delta\psi=-\omega.$$

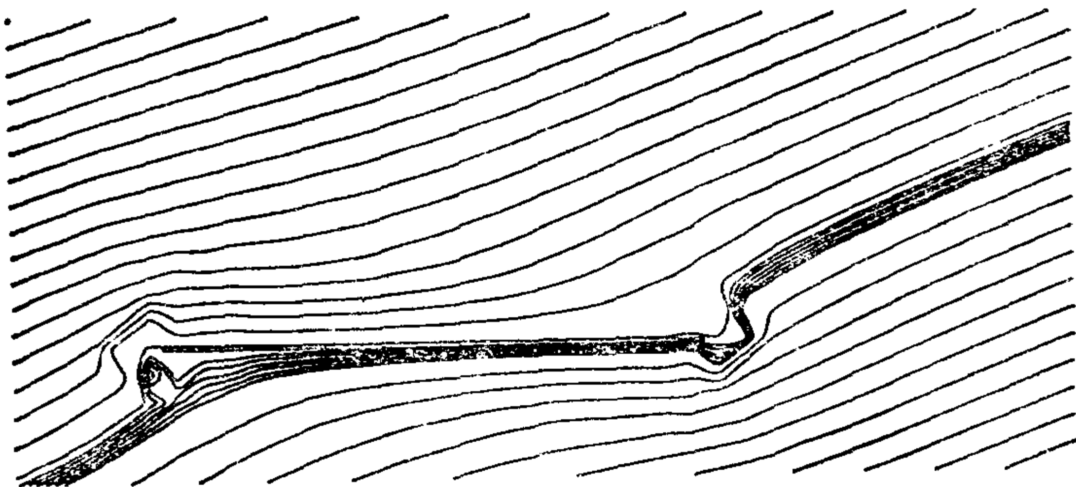
除了边界条件(4.6)以外，还有边界条件与初始条件

$$\psi|_{x\in\partial\Omega_0}=\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\Big|_{x\in\partial\Omega_0}=0,$$

$$\omega|_{t=0}=\omega_0(x),$$

其中 $\omega_0=\frac{\partial u_{02}}{\partial x_1}-\frac{\partial u_{01}}{\partial x_2}$，$u_{01},u_{02}$ 是 u_0 的分量。

在[30]中，用涡团法结合无限元方法解此问题。ψ满足Poisson方程，Ω_0既是无界区域，又有两个角点，内角等于2π。在这三个地方都用了无限的相似剖分。取攻角为20°，Reynolol数为1000，得到了流场的数值模拟。从图39至图45可以看到涡旋不断地在平板上产生，并不断地向下游流去的过程。



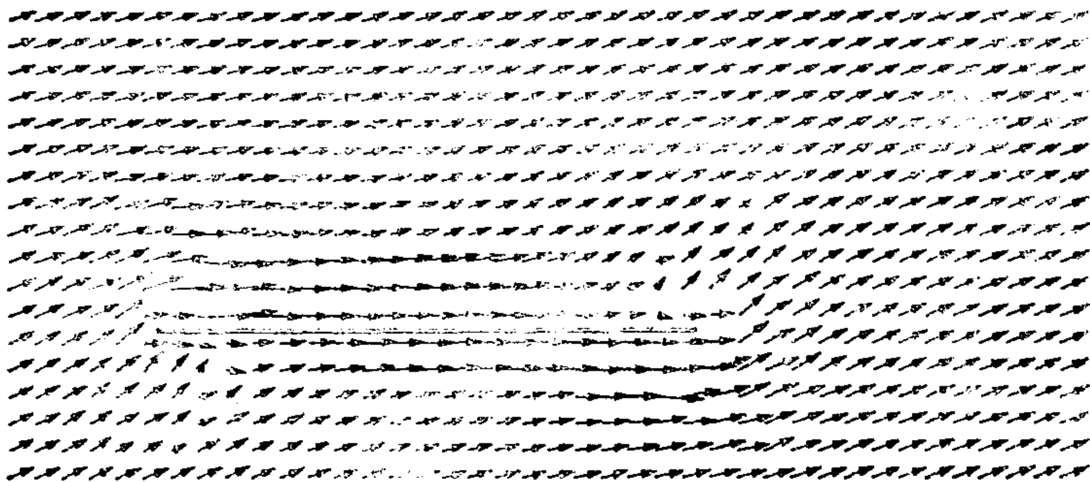


图39　初始流函数及速度分布$\theta = 20°$

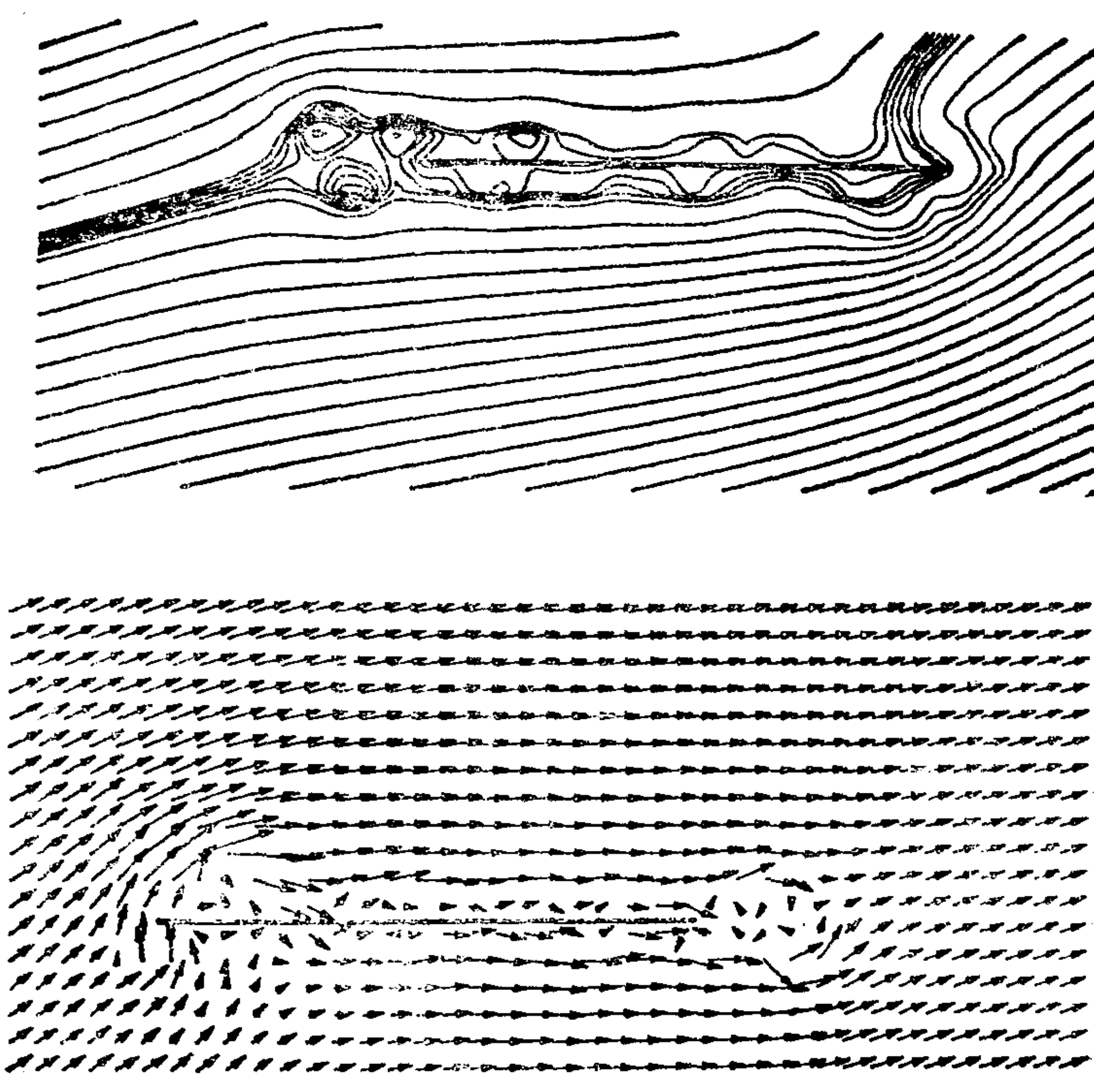


图40 流函数及速度分布

Re = 1000， $\theta = 20°$， $t = 0.2$

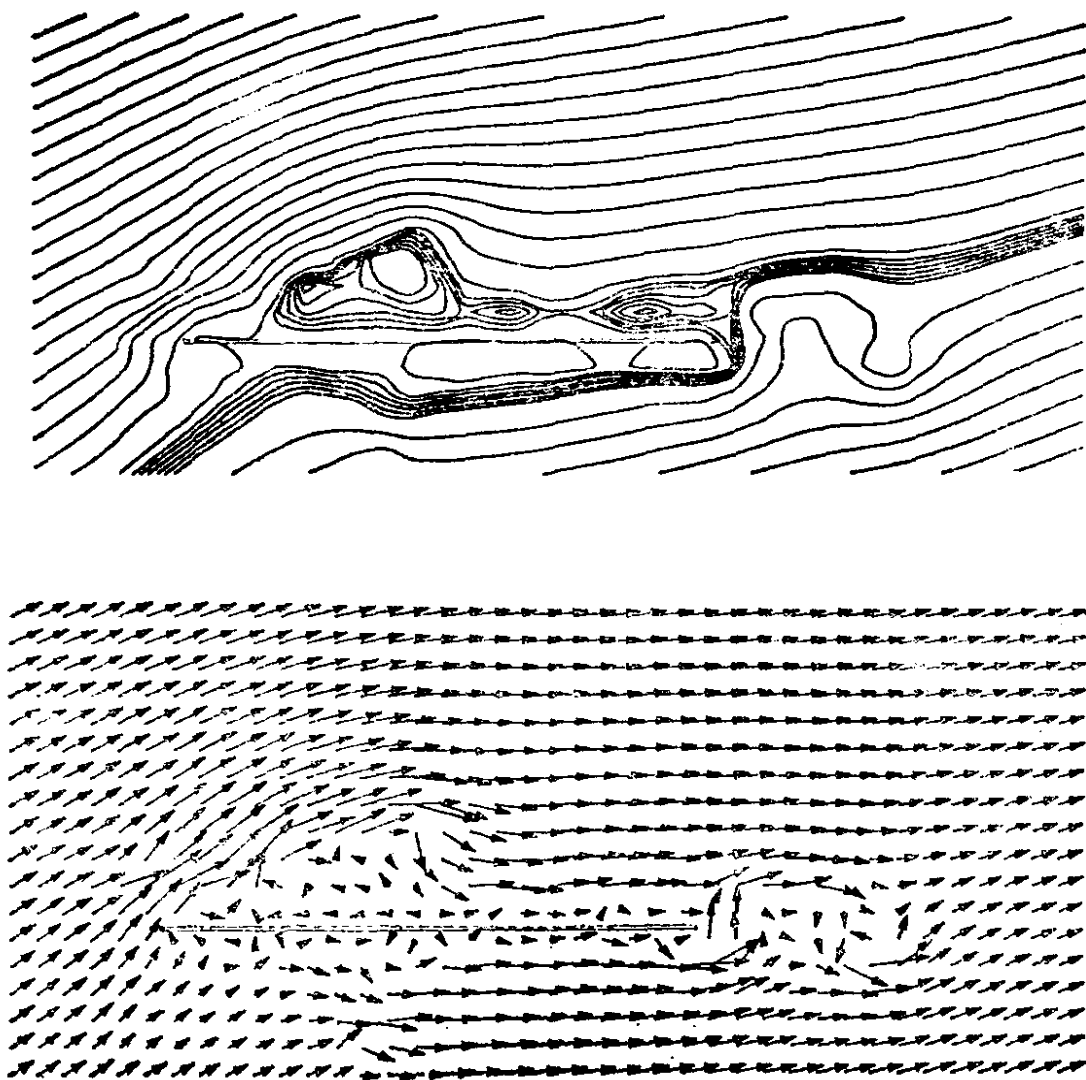
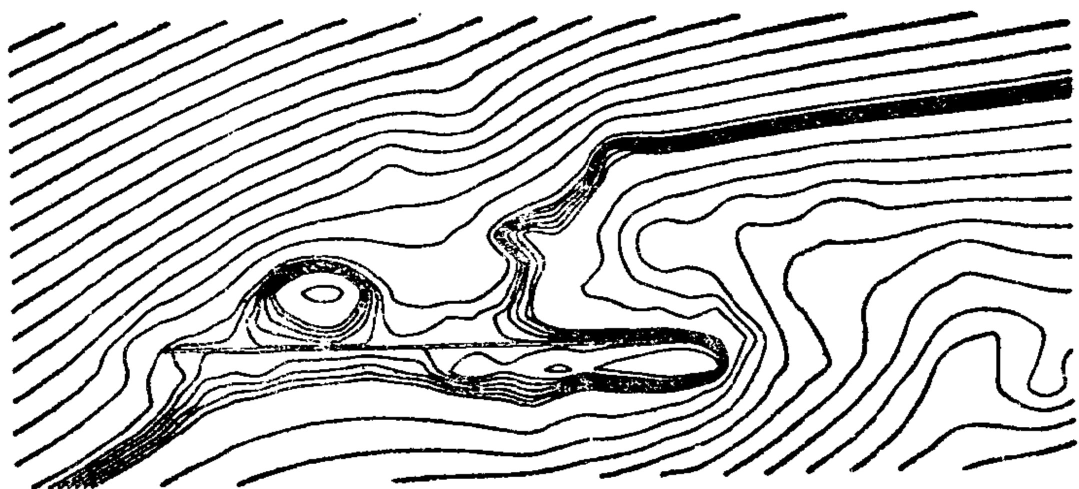


图41　流函数及速度分布

Re = 1000, $\theta = 20°$, $t = 0.4$



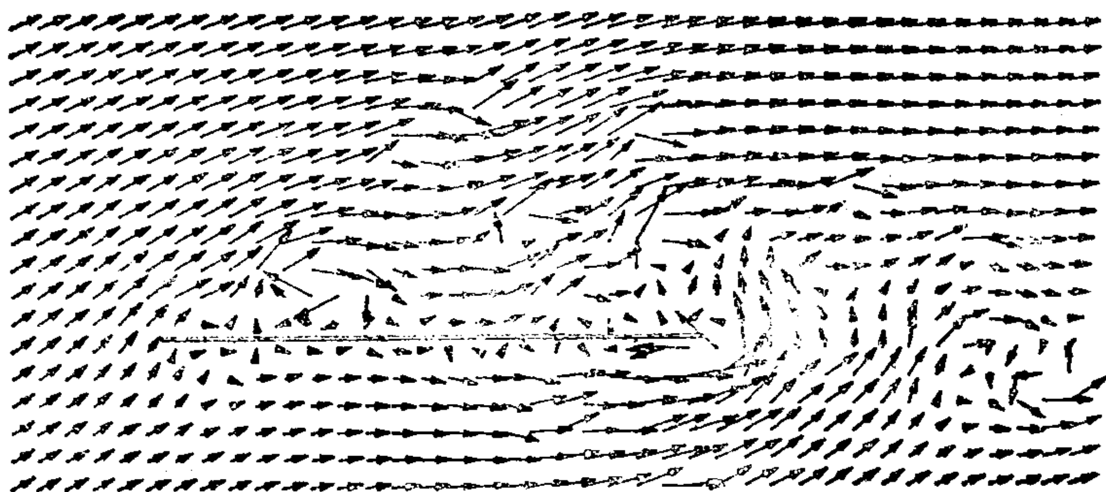
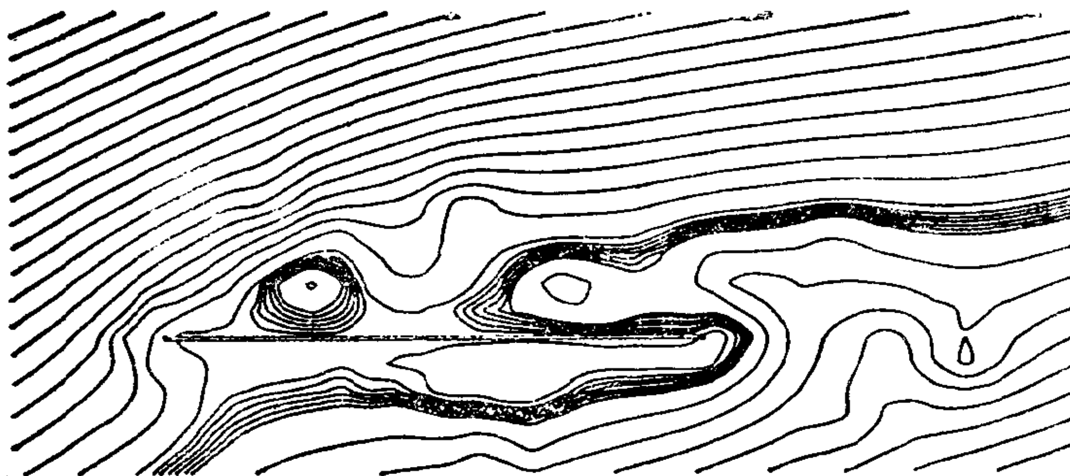


图42 流函数及速度分布
Re = 1000, $\theta = 20°$, $t = 0.6$



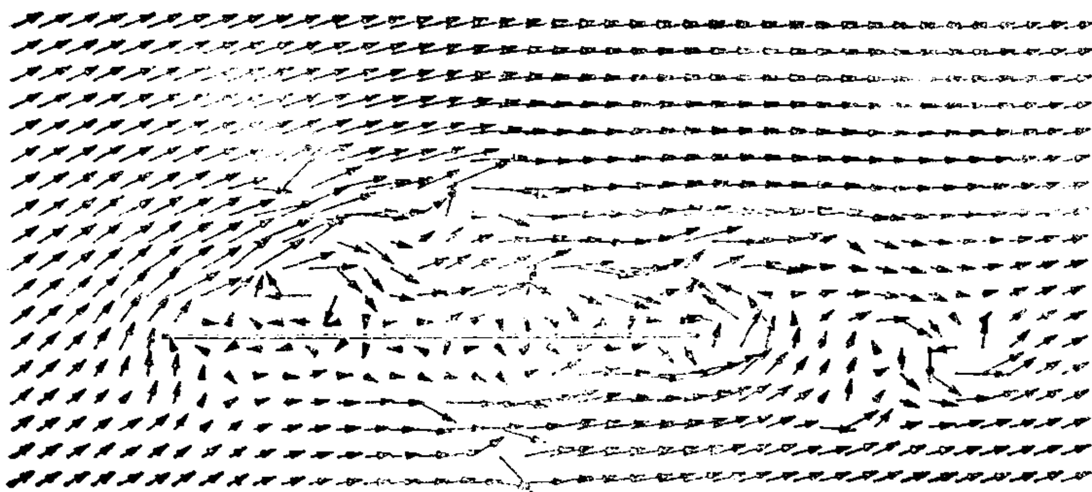
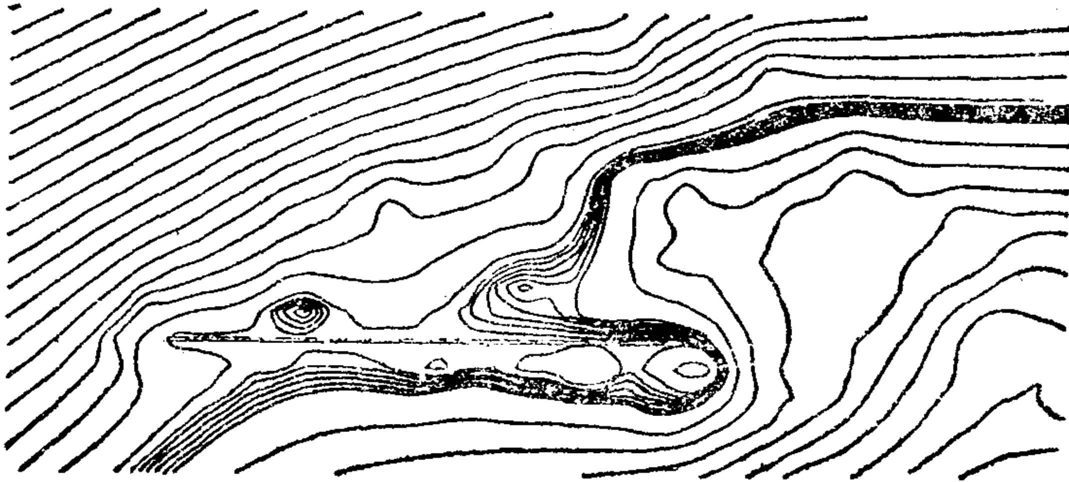


图45　流函数及速度分布

$Re=1000$，$\theta=20°$，$t=0.8$



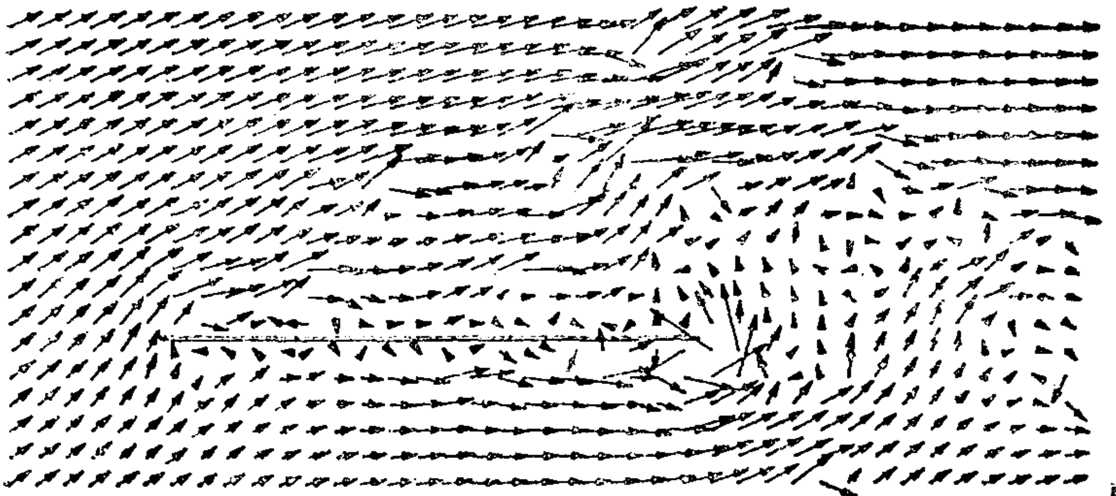


图44　流函数及速度分布

Re = 1000, $\theta = 20°$, $t = 1.0$

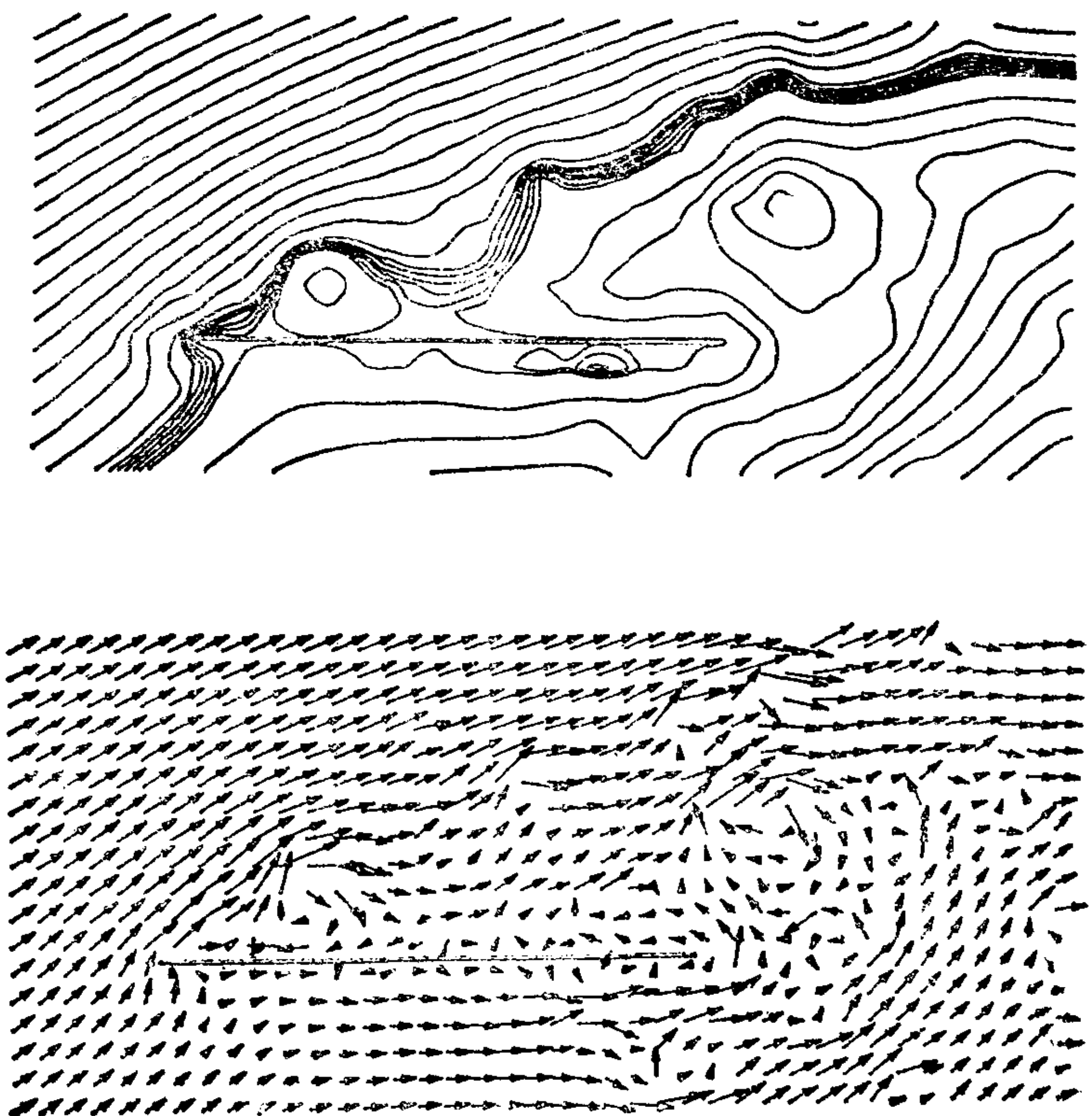


图45　流函数及速度分布

Re = 1000、$\theta = 20°$，$t = 1.2$

参 考 文 献

第一部分　无限元方法

[1] Silvester, P., Cermak, I.A., Analysis of coaxial line discontinuities by boundary relaxation, IEEE Trans. MTT, 17,8 (1969), 489—495.

[2] Thatcher, R.W., Singularities in the solution of Laplace's equation in two dimensions, J.Inst. Math. Appl.,16 (1975), 303—319.

[3] Thatcher, R. W., The use of infinite grid refinements at singularities in the solution of Laplace's equation, Numer. Math., 25 (1976), 163—178.

[4] 应隆安，计算应力强度因子的无限相似单元法，《中国科学》，6 (1977)，517—535.

[5] Thatcher, R.W., On the finite element method for unbounded regions, SIAM J. Numer. Anal., 15 (1978), 466—477.

[6] 应隆安，无限相似单元法的收敛性，《应用数学学报》，2，2 (1979)，149—166.

[7] 韩厚德、应隆安，无限元迭代法，《计算数学》1，1 (1979)，91—99.

[8] 郭仲衡，相似等参单元，《科学通报》，24，13 (1979)，577—582.

[9] 王淑静，奇点邻域的"等效"刚度矩阵，《应用数学学报》，2，4 (1979)，302—307.

[10] 应隆安、韩厚德，关于无界区域和非齐次问题的无限元法，《数学学报》，23，1(1980)，118—127.

[11] 冯康，论微分与积分方程以及有限元与无限元，《计算数学》，2 (1980)，100—105.

[12] 应隆安、潘灏，用无限相似单元法计算拱形试样的K_I和柔度，《固体力学学报》，1 (1981)，99—106.

[13] Han, H.D., The numerical solutions of interface problems by infinite element method, Numer. Math.,39(1982),39—50.

[14] Han, H.D., The error estimates for the infinite element method for eigenvalue problems,R.A.I.R.O. Numer.Anal., 16, 2 (1982), 113—128.

[15] Han, H.D., The finite element method in a family of improperly posed problems, Math. Comp., 38,157 (1982), 55—65.

[16] 应隆安，无限单元法，《数学进展》，11，4 (1982)，269—272.

[17] 邵秀民、王淑静，无限元方程组的 Fourier 解法，《高等学校计算数学学报》，2 (1983)，160—169.

[18] Han, H.D., The infinite element method for eigenvalue problems, 系统科学与数学，3，3 (1983)，163—171.

[19] Ying, L.-a., The infinite element method, Part I. The infinite element method for equations with constant coefficients, Proceedings of the China-France Symposium on FEM, Science Press, Beijing, China, Gordon and Breach, Science Publishers Inc., New York, 1983, 487—541.

[20] Ying, L.-a., The infinite element method, Part II.The infinite element method of non-similar case, 同上，542—565.

[21] Ying, L.-a., The convergence of infinite element method for the non-similar case, J.Comp. Math.,1,2(1983), 130—142.

[22] 应隆安、韩厚德，相似单元的通解和有限相似单元法，《数学年刊》，4A，5 (1983)，557—570.

[23] 许进超,Sobolev 空间中的若干不等式与多角形区域上的有限元和无限元，《北京大学硕士论文》，1984.

[24] 吴仕先，矿山地下水中的无限单元法，《水文地质工程地质》，82(1985)，1—4.

[25] Xu, J.-C., The error analysis and the improved algorithms for the infinite element method, Proceedings of the 1984 Symposium on Differential Geometry and Differential Equations, Science Press, Beijing, China, 1985, 326—331.

[26] 许进超、应隆安，无限元算法的分析与改进，《计算数学》，8，2 (1986)，164—174.

[27] Ying, L.-a., Infinite element approximation to axial symmetric Stokes flow, J Comp.Math., 4, 2 (1986), 111—120.

[28] 吴仕先，椭圆型方程的无限单元法，《河北师范大学学报》，1，(1986)，

1—23.

[29] 吴仕先，抛物型方程的无限单元法，《全国第一次偏微分方程数值解学术会议论文》，1986.

[30] Lu, J.-q., The construction of numerical solution of the N-S equation with singularity at corner point of the boundary，待发表.

[31] 刘伟东，非相似情形的无限单元法，《北京大学硕士论文》，1988.

第二部分　其他有关文献

[32] Lax, P.D., Milgram, A.N., Parabolic equations, Annals of Mathematics Studies No.33, Princeton University Press, Princeton 1954, 167—190.

[33] Гантмахер, Ф.Р.,《矩阵论》(中译本)，高等教育出版社，1955.

[34] 斯米尔诺夫，В.И.,《高等数学教程》，第五卷第二分册(中译本)，人民教育出版社，1964.

[35] Agmon, S., Douglis, A., Nirenberg,L.,Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions Ⅱ, Comm.Pure Appl. Math., 17, 1 (1964), 35—92.

[36] Wilkinson, J.H.,The Algebraic Eigenvalue Problem,Oxford University Press, London, 1965.

[37] Stampacchia, G., Le probleme de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 15 (1965), 189—258.

[38] Kato, T., Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag, 1966.

[39] 瓦格，R.S.,《矩阵迭代分析》(中译本)，上海科学技术出版社，1966.

[40] Kondratév, V.A., Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points,Trudy Moskov Mat Obšč, 1967, 209—292.

[41] Liebowitz, H. (主编), Fracture Vol.2, Academic Press,New York and London, 1968.

[42] Lions, J.L., Magenes, R.,Nonhomogeneous Boundary Value

Problems and Applications, Springer-Verlag, 1972.

[43] Aziz, A.K. (主编), The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations, Academic Press, New York and London, 1972.

[44] Ciarlet, P.G., Raviart, P.-A., Maximum principle and uniform convergence for the finite element method, Comput. Methods Appl. Mech. Engng., 2 (1973), 17—31.

[45] Nitsche, J.A., Schatz, A.H., Interier estimates for Ritz-Galerkin methods, Math. Comp., 28 (1974), 937—958.

[46] Ciarlet, P.G., The Finite Element Method for Elliptic Problems, North- Holland Publishing Co., 1978.

[47] Girault, V., Raviart, P.-A., Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 749, Springer-Verlag, 1979.

[48] 吉田耕作，《泛函分析》(中译本)，人民教育出版社，1981.

[49] 陈传淼，《有限元方法及其提高精度的分析》，湖南科学技术出版社，1982，

[50] Adams, R.A.，《索伯列夫空间》(中译本)，人民教育出版社，1983.

[51] 拉德任斯卡娅，O.A.，《粘性不可压缩流体动力学的数学问题》(中译本)，上海科学技术出版社，1983.

[52] 应隆安，《有限元方法讲义》，北京大学出版社，1988.